INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966-67

Exposé 6

PRO-OBJECTS (AFTER VERDIER (3))

(by J. DUSKIN)

1. Projective Systems.

Recall that a $\mathcal{U}$-category I ($\mathcal{U}$ a **universe** for which $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \in \mathcal{U}$ for each $X,Y \in \mathrm{Ob}(C)$) is called $\mathcal{U}$-small provided both $\mathrm{Ob}(I)$ and $F\ell(I)$ are members of $\mathcal{U}$. Any pre-ordered set $I \in \mathcal{U}$ defines a $\mathcal{U}$-small category, again denoted by I, which has the set I as its set of objects and the graph of the order relation on I as its arrows. i.e.

$[\text{for } \alpha,\beta \in I,\ (\alpha,\beta) : \alpha \to \beta] \Leftrightarrow [\alpha \leq \beta]$, using the conventional

notations. If, moreover, I is filtered decreasing($\alpha,\beta \in I \Rightarrow \exists\, \gamma \in I$ such that $\gamma \leq \alpha$ and $\gamma \leq \beta$) then the corresponding small $\mathcal{U}$-category is said to be a ($\mathcal{U}$-small filtered decreasing) index category.

1.1. Definition.

If I is an index category, then a functor $F : I \to \underline{C}$ is called a (filtered decreasing) projective system in $\underline{C}$, indexed by I. The arrows $F(i,j):F(i)\to F(j)$ are called the morphisms of transition for F. If F is a projective system in $\underline{C}$, and F factors through some subcategory $\underline{C}'$ of $\underline{C}$, the F may be said to be of type $\underline{C}'$. If $F : I \to C$ is a projective system and $i : I' \hookrightarrow I$ is a subindex category then iF is called a sub(projective) system of F.

Remark. It is clear that the same considerations can be obtained with contravariant functors on filtered increasing index categories.

1.2. Definition .

If $\varphi : I \to J$ is a functor of index categories (i.e. arises from an increasing application of pre-ordered sets) then φ is said to be co-initial provided the application from which it arises is co-initial (i.e. for all $j \in J$, there exists an $i \in I$ such that $\varphi(i) \leq j$) .

All categories from now on are assumed to be $\mathcal{U}$-categories for some convenient universe $\mathcal{U}$ fixed for the discussion. Similarly all index categories are assumed $\mathcal{U}$-small and non-void. (ENS) will, as usual, refer to the category of $\mathcal{U}$-sets and applications.

A number of trivial observations about index categories are useful in what follows:

1.3. Proposition .

(i) The composition of co-initial functors is co-initial. Any surjective increasing application is co-initial. In particular the identity functor is co-initial.

(ii) If $i : J \hookrightarrow I$ is co-initial and I is filtered then J is also filtered.

(iii) If J and I are filtered, then $J \times I$ is filtered ; If J and I are non-void, the projection functors are co-initial.

2. Pro-Representable Functors (cf. Grothendieck (1)) .

If $F = (X_i, x_{ij})_{i \in I}$ is a projective system in $\underline{C}$, F equally well defines for each $T \in Ob(\underline{C})$ an inductive system of sets and applications (filtered increasing)

$$(\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_i, T), \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x_{ij}, T) : \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_j, T) \to \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_i, T))_{i \in I} ,$$

which admits an inductive limit (i.e. a particular set of equivalence classes of arrows of the form $X_i \to T$)

$$h'_F(T) = \varinjlim_{i\in I} (\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_i, T)) \ .$$

Remark . The equivalence relation is worth looking at in detail. In effect a couple of arrows $(f : X_i \to T \ , \ g : X_{i'} \to T)$ are equivalent provided there exists an $i'' \in I$ with $i'' \leq i$ and $i'' \leq i'$ such that the resulting square

$$\begin{tikzcd} X_{i''} \arrow[r, "x_{i''i'}"] \arrow[d, "x_{i''i}"'] & X_{i'} \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

is commutative. This relation on $\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, T)$ is obviously reflexive and symmetric as it stands and is also transitive provided the index I is filtered decreasing .

h'_F is thus, by definition, the inductive limit of the inductive system $(h'_{X_i})_{i\in I}$ of covariant representable functors $(h'_{X_i}(T) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_i, T))$.

2.1. Definition .

A functor $F : \underline{C} \to (\mathrm{ENS})$ is called pro-representable provided it is functorially isomorphic to a functor of the form h'_F for some projective system $F : I \to \underline{C}$ indexed by some (filtered) index category I .

It is of course to be kept in mind that the same pro-representable functor may be defined by different (non-isomorphic) projective systems. A sufficient condition is the existence of a co-initial functor between the index categories compatible with the two systems .

3 . Pro-Objects .

The pro-representable functors form a full sub-category PRO-REP($\underline{C}$) of the category $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}, (\mathrm{ENS}))$ of set-valued functors on $\underline{C}$ which contains the full sub-category of (co-variant) representable functors of $\underline{C}$, each

considered as arising from a projective system indexed by a one element set. To regularise this contravariant "Yoneda type" embedding "$X \mapsto h'_X$" we define the category $\underline{PRO}(\underline{C})$ of <u>pro-objects</u> of $\underline{C}$ as the category <u>opposite</u> to the category of pro-representable functors. With this definition we have $\underline{C}$ equivalent to a full subcategory of $\underline{PRO}(\underline{C})$. Whenever convenient we shall consider $\underline{C}$ identified with this full subcategory and write for example X_i in place of h'_{X_i} for objects X_i from $\underline{C}$.

Since every <u>object</u> in $\underline{PRO}(\underline{C})$ is an inductive limit in $\underline{Hom}(\underline{C}, (ENS))$ of an inductive system of covariant representable functors, and morphisms of pro-objects are simply natural transformations taken in the opposite sense, every object in $\underline{PRO}(\underline{C})$ in thus (in $\underline{PRO}(\underline{C})$) a <u>projective limit of a projective system of representable functors</u>. With the identification of X_i with h'_{X_i} for the objects and arrows of $\underline{C}$, we may thus represent every pro-object F in at least one form as $\varprojlim_{i\in I} X_i$ for some projective system $(X_i)_{i\in I}$ arising from $\underline{C}$. Phrased differently, we may say that every projective system in $\underline{C}$ admits a projective limit in $\underline{PRO}(\underline{C})$ and that every object in $\underline{PRO}(\underline{C})$ is isomorphic to such a limit. To avoid confusion with the limit of the equivalent system in $\underline{C}$ (which may not even exist) we use the notation "$\varprojlim_{i\in I}$" X_i to indicate this representation of any object in $\underline{PRO}(\underline{C})$.

The Yoneda-Grothendieck lemma admits as generalization the following.

3.1. <u>Proposition</u>.

<u>Let</u> $F = (X_i)_{i\in I}$ <u>and</u> $G = (Y_i)_{i\in I}$ <u>be projective systems in</u> $\underline{C}$, h'_F <u>and</u> h'_G <u>the pro-objects which they define. One then has canonical isomorphisms</u>

$$\mathrm{Hom}_{\underline{PRO}(\underline{C})}(h'_G, h'_F) =_{DEF} \mathcal{H}om(h'_F, h'_G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_i) .$$

Let $\varphi : h'_F \to h'_G$ be a natural transformation. For each $T \in Ob(\underline{C})$ one then has the application

$$\varphi(T) : \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_i, T) \to \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, T) .$$

In particular for each $i \in Ob(I)$, $\varphi(X_i)\ ([\mathrm{id}\, X_i]) \in \varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_i)$, where $[\mathrm{id}\, X_i] \in \varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X_k, X_i)$ is the equivalence class of the identity arrow. The family $(\varphi(X_i)([\mathrm{id}\, X_i]))_{i \in I}$ is thus included by naturality as a member of the projective limit $\varprojlim_{I} \varinjlim_{J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_i)$ of the <u>projective</u> system $(\varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_i)\ ,\ \varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_{ii'}))_{i \in I}$.

Reciprocally, being given a family $([\varphi_i])_{i \in I} \in \varprojlim_{i \in I} \varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, X_i)$ of sets of arrows in $\underline{C}$, it is a matter only of tedious verification to see that if one defines for each $T \in Ob(\underline{C})$ and set $[f_i : X_i \to T] \in \varinjlim_{j \in J} \mathrm{Hom}(X_i, T)$,

$$\varphi(T)\ ([f_i]) = [\varphi_i f_i : S(\varphi_i) \to T]$$

in $\varinjlim_{J} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(Y_j, T)$, the so defined application is natural and bijectivity inverse to the former.

<u>Remark</u> . The question may be raised as to whether any generality is obtained by replacing filtered sets (i.e. here <u>index categories</u>) with filtered small categories(i.e. where the set of arrows is no longer simply a graph). The following proposition due to Deligne (2) and Lazard, shows that this is not the case, and consequently gives a convient criterion for "pro-representability".

3.2. <u>Proposition</u> .

Let $\underline{C}$ be a $\mathcal{U}$-category which admits finite projective limits ; $F : \underline{C} \to (\mathrm{ENS})$ a functor. The following statements are equivalent :

(i) F is pro-representable (i.e. $F \simeq \varinjlim h'_{X_i}$) ;

(ii) F is the inductive limit of an inductive system of representable functors indexed by a $\mathcal{U}$-small filtered category ;

(iii) F is left exact (i.e. conserves finite projective limits) and there exists a $\mathcal{U}$-small epimorphic family $(X_i)_{i\in I}$ of objects of $\underline{C}$ below F (i.e. $(\varphi_i : h'_{X_i} \to F)_{i\in I}$ exists such that for each $T\in Ob(\underline{C})$, $\coprod_{i\in I} Hom_{\underline{C}}(X_i T) \to F(T)$ is surjective).

The proof is based on the following lemma.

3.3. Lemma.

For every small filtered category L, there exists a small filtered ordered set (i.e. index category) I supplied with a co-initial functor $\varphi : I \to L$.

The following lemmata investigate the links between the categories of the form $\underline{Hom}(I,\underline{C})$ and $\underline{PRO}(\underline{C})$.

3.4. Lemma.

Let $F = \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i$ be an object in $\underline{PRO}(\underline{C})$, T an object in $\underline{C}$. For each pair $u,v : X_i \rightrightarrows T$ of arrows of $\underline{C}$ for which $u\, pr_i = v\, pr_i$, ($pr_i : \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i \to X_i$ the canonical projection in $\underline{PRO}(\underline{C})$), there exists an $i' \leq i$ in I such that $u\, x_{i'i} = v\, x_{i'i}$.

The lemma is immediate since the condition in question is simply a transcription of the statement that the arrows $u,v \in Hom_{\underline{C}}(X_i,T)$ have the same image in $\varinjlim_I Hom_{\underline{C}}(X_i,T)$, i.e. are equivalent under the relation defined in section 2.

3.5. Lemma.

For each arrow $u : F \to G$ in $\underline{PRO}(\underline{C})$ and any choice of projective systems $\underline{X} = (X_i,x_{ij})_{i\in I}$ and $\underline{Y} = (Y_j,y_{jk})_{j\in J}$ in $\underline{C}$ such that $F = \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i$ and $G = \text{"}\varprojlim_J\text{"} Y_j$, there exists a (filtered) index category H_u, supplied with co-initial functors $\varphi : H_u \to I$, $\psi : H_u \to J$ and a morphism of pro-

jective systems $u' : \underline{X}\varphi \to \underline{Y}\psi$, such that $\varprojlim_{H_u} u' = u$.

In other words any arrow u in $\underline{PRO}(\underline{C})$ may be regularized by an arrow in some category $\underline{Hom}(H_u,\underline{C})$.

The proof of the lemma proceeds as follows. H_u is that set whose objects are the triples $(i,f : X_i \to X_j, j), i\in I, j\in J$, $f \in F\ell(\underline{C})$, such that $f\,pr_i = pr_j\,\mathcal{U}$ in $\underline{PRO}(\underline{C})$ (with $pr_{i,j}$ the canonical projections). We order H_u by

$$\ll (i,f,j) \leq (i',g,j') \gg \text{ if and only if } \ll i \leq i', j \leq j' \text{ and } g\,x_{ii'} = y_{jj'} f \gg$$

where the $x_{ii'}$ and $y_{jj'}$ are the morphisms of transition. H_u is clearly pre-ordered by this relation ; it is also filtered : let (i_1,u_1,j_1) and (i_2,u_2,j_2) be a pair in H_u . Since J is filtered there exists a j_3 such that $j_3 \leq j_1$ and $j_3 \leq j_2$.
Inspection of the proof of Proposition 3.1., will easily show that for any $j \in J$ then exists at least one member of H_u which has the given j for projection. Consequently, let (x_3,u_3,j_3) be one such with j_3 for projectio
Now since I is equally will filtered there exists $k \in I$ such that $k \leq i$, and $k \leq i_3$. But then $u,x_{ki_1},pr_k = y_{j_3},u_3\,x_{ki_3}\,pr_k$ so that Lemma 3.4. applies and there exists $k' \leq k \in I$ such that $y_{i_3i_1},u_3\,x_{k'i_3} = u_1\,x_{k'i_1}$. Symmetrically, one has the existence of $\ell' \in I$ such that $y_{i_3i_2}\,u_3\,x_{\ell'i_3} = u_2 x_{\ell'i_2}$

and, by filtration, an $m \in I$ such that $m \leq k'$ and $m \leq \ell'$. The triple $p = (m,\ u_3x_{mi_3},j_3)$ thus has the desired proprety for by definition

$p \leq (i_1,u_1,j_1)$ and $p \leq (i_2,u_2,j_2)$.

The projection of H_u in J is surjective, thus co-initial. The projection in I is also co-initial sunce $J \neq \phi$ and I is filtered. The projection of H_u into $F\ell(\underline{C})$ defines a natural transformation whose limit is obviously u .

Q.E.D.

The next lemma shows that this process of "regularization" can be made compatible with the composition in $\underline{PRO}(\underline{C})$.

3.6. Lemma .

For each composable couple (u,v) of arrows in $\underline{PRO}(\underline{C})$, there exists a filtered index category $H_{(u,v)}$, together with co-initial functors $a : H_{(u,v)} \to H_u$, $b : H_{(u,v)} \to H_v$, $u : H_{(u,v)} \to H_{vu}$, and a natural transformation w of projective systems indexed by $H_{(u,v)}$ such that $\text{"}\varprojlim_{H_{(u,v)}}\text{"}\ w = vu$.

Define $H_{(u,v)}$ as the category fibre product $H_u \times_J H_v$ taken over their common projections into J . It is easily verified that the inclusion of $H_{(u,v)}$ into $H_u \times H_v$ is co-initial. $H_{(u,v)}$ is thus a filtered subcategory of the filtered category $H_u \times H_v$ and the projections into H_u and H_v are thus co-initial. Since the functor defined by the assignment

$$\ll ((\alpha,f,\beta) \ , \ (\alpha,g,\gamma)) \mapsto (\alpha,gf,\gamma) \gg$$

is also co-initial, the natural transformation consequently defined has the desired property.

4 . Application to abelian categories .

4.1. Proposition .

If a category $\underline{A}$ is abelian, then $\underline{PRO}(\underline{A})$ is abelian. The canonical embedding $h' : \underline{A} \to \underline{PRO}(\underline{A})$ is exact, fully faithful, and commutes with inductive limits.

The additive structure is clear from Proposition 3.1. (the "hom" sets are inductive limits of abelian groups) and any zero object in $\underline{A}$ furnishes a zero for $\underline{PRO}(\underline{A})$. Similarly the existence of a direct sum for couples in $\underline{A}$ furnishes a direct sum for couples of object in $\underline{PRO}(\underline{A})$. (For any two objects $F = \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i$, $G = \text{"}\varprojlim_J\text{"} Y_j$ in $\underline{PRO}(\underline{A})$, the filtered index category $I \times J$ furnishes

with its co-initial projections the appropriate characteristics of a direct sum to the pro-objet $"\varprojlim_{I\times J}" X_i \oplus Y_j)$.

We construct in detail the kernel for an arrow $u : "\varprojlim_I" X_i \to "\varprojlim" Y_j$ in $\underline{PRO}(\underline{A})$: the defining system H_u of Lemma 3.5. defines a projective system of objects of $\underline{A}$ indexed by H_u by means of the assignment $"(i,f,j) \mapsto Ker(f)"$. The resulting pro-object $"\varprojlim_{H_u}" Ker(f)$ together with its monomorphism $in = "\varprojlim_{H_u}" in_{Ker(f)}$ furnishes a kernel for the arrow u in $\underline{PRO}(\underline{A})$, for if (x,u) is a complex in $\underline{PRO}(\underline{A})$, the subcategory $H_{k(v,u)} \hookrightarrow H_{(u,v)}$ which consists of those couples $((k,g,i'),(i',f',j))$ such that $f'g = 0$ in $\underline{A}$ is co-initial by use of Lemma 3.4., and by composition with the projection is co-initial in H_v , consequently, it defines a co-initial subsystem of the kernel system along with the desired natural transformation into $"\varprojlim" Ker(f)$.

The construction of a cokered is entirely similar and, along with the construction of the isomorphism of Coim and Im , is left to the reader. <u>The general principal in all cases is simply to construct the desired limits as some category $\underline{Hom}(H,A)$ and show by use of Lemma 3.4. that the defining property of the given limit has a co-initial representation in $\underline{PRO}(\underline{A})$</u> .

The construction and Proposition 3.5. leaves little doubt about the propecties of the embedding h' and completes the proof of the proposition.

5. <u>Essential equivalence of projective systems for abelian categories</u> .

Of the various projective systems in $\underline{C}$, those characterized by various categorical properties (such as being countable, or having all morphisms of transition epimorphisms, monomorphisms, or zero, etc..) come to mind in any natural scheme of classification. But as has been obvious all along, radically different projective systems in $\underline{A}$ can give rise to the same (or at least canonically isomorphic) pro-objects. For example, in order that a projective system define a zero object in $\underline{PRO}(\underline{A})$ it is sufficient (and of course necessary) that the projective system contain co-initially a zero-system

(where all transition morphisms are zero) and for which the simple condition "for each $i \in I$ there exists $j \leq i$ such that $x_{ji} = 0$", requiring neither all objects nor transitions to be zero, suffices. Any iterated sequence of complexes gives rise to such a non-trivial but "essentially null" system.

Projective systems, and the proobjects which they define which may be qualified as being "essentially" of a given simple categorical type play a crucial role in the application of PRO(A), and conditions which allow characterization "internally" have been investigated by Laudal (4). Our interest is primarily limited to abelian categories ; we leave it to the reader to separate from the abelian case those characterizations which hold in more general situations (when they exist).

5.1. Proposition.

Let $F = \text{"}\varprojlim_I\text{"}\, X_i$ be an object in PRO(A). The following statements are equivalent :

a) The defining system for F satisfies the condition

(EM) : There exists $j_o \in I$ such that for all $i \leq j_o$, there exists $h \leq i$ for which the canonical arrow $\mathrm{Ker}(x_{hi}) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(x_{hj_o})$ is an isomorphism ;

b) F is a subobject (in PRO(A)) of some objet of A ;

c) F is isomorphic to the limit of a projective system of objects arising from A all of whose morphisms of transition are monomorphisms. ("F is definable by a monomorphic system").

If the representation of F satisfies the condition (EM), consider the projection arrow $pr_{j_o} : \text{"}\varprojlim_I\text{"}\, X_i \to X_{j_o}$; we claim that it is a monomorphism. Consider the defining system $H_{pr_{j_o}}$ of Lemma 3.5. and the kernel system defined by the system of arrows $x_{ij_o} : X_i \to X_{j_o}$. By hypothesis, for each such member

there exists an h such that $\mathrm{Ker}(x_{h_i}) \cong \mathrm{Ker}(x_{hj_o})$, but then for each such arrow the corresponding morphism of transition of the Kernel system is necessarily zero . i.e. the kernel system for $\mathrm{Ker}(pr_{j_o})$ contains a co-initial subsystem whose morphisms of transition are zero. It follows that $\mathrm{Ker}(pr_{j_o}) \cong 0$ and hence F is a sub-object of X_{j_o} .

Now suppose that F is a sub-object of some object of $\underline{A}$; that is to say there exists a monomorphism $u : \text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"} X_i \hookrightarrow X$ in $\underline{PRO}(\underline{A})$ with $X \in Ob(\underline{A})$. Each arrow $u_i : X_i \to X$ projected from an object in the defining system H_u for this monomorphism factors through the subobject $\mathrm{Im}(u_i)$ of X and consequently defines a projective system of subobjects of X all of whose morphisms of transition an necessarily monomorphisms. But then in the limit, $\text{"}\varprojlim\text{"} X_i \cong \text{"}\varprojlim\text{"} \mathrm{Im}(x_i)$ since u is a monomorphism. We have thus produced the desired monomorphic defining system.

Since the implication "(c) $\Rightarrow$ (a)" is trivial the proposition is demonstrated and we make the following definition.

5.2. <u>Definition</u> .

<u>An object of $\underline{PRO}(\underline{A})$ (or the defining system which represents it) which satisfies any one of the equivalent conditions of Proposition 5.1. will be said to be essentially monomorphic.</u>

Following the same principle we call a pro-object F <u>essentially epimorphic</u> (or <u>strict</u>) provided it satifies one of the equivalent conditions of

5.3. <u>Proposition</u> .

<u>For</u> $F = \text{"}\varprojlim_{I}\text{"} X_i$ <u>in</u> $\underline{PRO}(\underline{A})$, <u>there exists a projective system</u> $(Y_j, y_{jk})_{j\in J}$ <u>of objects of</u> $\underline{A}$ <u>whose morphisms of transition are all epimorphisms for which</u> $\text{"}\varprojlim_{J}\text{"} Y_j \cong F$, <u>if, and only if, the system</u> $(X_i, x_{ij})_{i\in I}$ <u>satisfies the condition of Mittag-Leffler</u> :

(ML) For all $i \in I$, there exists $j_o \leq i$ such that for all $j' \leq j_o$, the canonical arrow $p : Im(x_{j'i}) \to Im(x_{j_o i})$ is an isomorphism.

The proof is entirely analogous to that of Proposition 5.1. and may be found in Laudal (4).

Combining these results, we call a pro-object which is essentially monomorphic and essentially epimorphic, <u>essentially constant</u>. A pro-object is essentially constant if and only if it is isomorphic to an object in $\underline{A}$, but the conditions (EM) and (ML) which are then satisfied eliminate the need to be specific about the particular object from $\underline{A}$ and allow the criterion to be phrased entirely interms of any given representing projective system.

Finally if $\underline{A}'$ is a full subcategory of $\underline{A}$, (not necessarily abelian) a pro-object is said to be <u>essentially of type</u> $\underline{A}'$ provided it is isomorphic to a pro-object of $\underline{PRO}(\underline{A}')$.

5.4. <u>Proposition</u>.

<u>In order that a pro-object be essentially of type</u> $\underline{A}'$, <u>it is necessary and sufficient that its defining system have the property</u> "<u>for each</u> $i \in I$, <u>there exists a</u> $j \leq i$ <u>such that the transition morphism</u> x_{ji} <u>factorises through an object</u> A'_{ji} <u>of</u> $\underline{A}'$".

Let $X : I \to \underline{A}$ a defining system for the given pro-object. We suppose the factorization chosen and let $C(I)$ be the category correspondence of I with I defined by the set

$$\{(j,i) \mid j,i \in I \quad x_{ji} : X_j \xrightarrow{s} A_{ji} \xrightarrow{t} X_i\}$$

supplied with the product order of $I \times I$. By hypothesis the projections of $\underline{C}(I)$ in I are both co-initial. We now define a refinement $\underline{\underline{C}}(I)$ of $\underline{C}(I)$ with the order relation $\ll (j',i') \ll (j,i) \Leftrightarrow i' \leq j \gg$. The refining functor $a : \underline{\underline{C}}(I) \to \underline{C}(I)$ is again co-initial so that the systems $X_1 = Xpr_1 a$ and $X_2 = Xpr_2 a$ both define pro-objects isomorphic to that defined by X. Moreover, the functor A defined by the assignments

$$\ll (j,i) \mapsto A_{ji}\ ,\ ((j',i'),(j,i)) \mapsto s\ x_{ij}\ t' \gg$$

is a projective system indexed by $\underline{C}(I)$ which has values in the (full) subcategory $\underline{A}'$ of $\underline{A}$, for which the factorization arrows define in $\underline{PRO}(\underline{A})$ the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\text{"}\varprojlim\text{"}\ X_1 \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "s"'] & & \text{"}\varprojlim\text{"}\ X_2\ (\simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\ X) \\
& \text{"}\varprojlim\text{"}\ A \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

But x is an isomorphism, hence $p = s\ x^{-1}\ t : \text{"}\varprojlim\text{"}\ A \to \text{"}\varprojlim\text{"}\ A$ is a projector $(pp = id)$ for which we may define the projective system F with values in $\underline{PRO}(\underline{A}')$ by $\ll n \mapsto \text{"}\varprojlim\text{"}\ A\ (n,n') \mapsto p \gg$. As $\varprojlim F(\simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\ X_1 \simeq \text{"}\varprojlim\text{"}\ X)$ is the projective limit of a system of pro-objects in the full subcategory $\underline{PRO}(\underline{A}')$, it is an object in $\underline{PRO}(\underline{A}')$. We have produced a pro-object in $\underline{PRO}(\underline{A}')$ isomorphic to that defined by X as required.

Q.E.D.

The converse is left to the reader.

5.5. Proposition.

The following statements are true in the abelian category $\underline{PRO}(\underline{A})$.

1) Subobjects of essentially monomorphic pro-objects are essentially monomorphic. Quotient objects of essentially epimorphic pro-objects are essentially epimorphic.

2) Let $0 \to F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \to 0$ be an exact sequence in $\underline{PRO}(\underline{A})$. If F' and F'' are essentially monomorphic (resp. epimorphic, resp. of type $\underline{A}'$), then F is essentially monomorphic (resp. epimorphic, resp. of type $\underline{A}'$).

3) Let $0 \to F_0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ be an exact sequence of pro-objects. If F_1 and F_2 are essentially constant (resp. essentially of type $\underline{A}'$), then F_0 and F_3 are essentially constant (resp. essentially of type $\underline{A}'$).

The demonstration of the first part of (1) is trivial from proposition 5.1. b . The analogous statement for epimorphisms may be proved as follows : Suppose given $G \simeq \text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"}\, Y_j$ as quotent object of some essentially epimorphic pro-object F in $\underline{PRO}(\underline{A})$. By Proposition 5.3. we may find a defining system for F whose morphisms of transition are all epimorphisms. We thus have an exact sequence

$$F = \text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"}\, X_i \xrightarrow{u} \text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"}\, Y_j \xrightarrow{o} 0$$

in $\underline{PRO}(\underline{A})$ in which the morphisms of transition $x_{i',i}$ of the system (X_i) are all epimorphisms. Thus consider any morphism

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "x_{i,i'}"] & Y_j \arrow[r] \arrow[d, "y_{j,j'}"] & \mathrm{Cok}(u_2) \arrow[d, "k"] \\
X_{i'} \arrow[r, "u_1"] & Y_{j'} \arrow[r] & \mathrm{Cok}(u_1)
\end{tikzcd}$$

in the defining system for the couple (u,o) . The coker system is essentially null; thus for the morphism k we may find a k' such that $k\,k' = 0$ and thus a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
X_{i''} \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "x_{i'',i'}"] & Y_{j''} \arrow[r] \arrow[d, "y_{j'',j'}"] & \mathrm{Cok}(u_3) \arrow[d, "0 = k\,k'"] \\
X_{i'} \arrow[r, "u_1"] & Y_{j'} \arrow[r] & \mathrm{Cok}(u_1)
\end{tikzcd}$$

Since $x_{i'',i'} = x_{i,i'} \circ x_{i'',i'}$ is an epimorphism $y_{j'',j'}$ is also an epimorphism as thus so was y_{ij} consequently. The system $(Y_j)_{j\in J}$ is essentially epimorphic.

In the case for the assertion (2) we may proced as follows : the defining system for the complex (u,v) contains a co-initial subcategory I defined by complexs. That is we may consider the complex (u,v) as defined by those

couples $(u_1, v_1) : X_i \xrightarrow{u_1} Y_j \xrightarrow{v_1} Z_k$ such that $v_1 w_1 = 0$ and where X_i, Y_j, Z_k are obtained from the given representation $\text{"}\varprojlim_{i\in I}\text{"} X_i \xrightarrow{u} \text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"} Y_j \xrightarrow{v} \text{"}\varprojlim_{n\in K}\text{"} Z_k$ with the couples (u_1, v_1) each commuting with the projection morphisms as usual. For each such couple we associate the short exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ker}(v_1) \to Y_j \to \mathrm{Im}(v_1) \to 0 ,$$

and for each morphism of couples we associate the induced morphism of short exact sequences. The canonical morphisms $X_i \to \mathrm{Ker}(v_1)$ and $\mathrm{Im}(v_1) \hookrightarrow Z_k$ then define isomorphisms in the limit since the given sequence is exact in $\underline{\mathrm{PRO}}(\underline{A})$.

We now use this new system to complete the proof in the case for essential monomorphisms : in the light of 5.1. b, chose F'' represented by a monomorphic system. The system $F' = \text{"}\varprojlim\text{"} X_i$ will satisfy the condition (EM) by hypothesis. It follows then that the derived system $(\mathrm{Im}(u_1))$ is monomorphic and that the system $(\mathrm{Ker}(v_1))$ satisfies the condition (EM) . It follows that the system (Y_j) also satisfus the condition (EM) for any morphism of transition gives rise to the following diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(v') \arrow[r, hook] \arrow[d, "a"'] & Y_j \arrow[r] \arrow[d, "y_{jj'}"] & \mathrm{Im}(v') \arrow[r] \arrow[d, hook, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(v) \arrow[r, hook] & Y_{j'} \arrow[r] & \mathrm{Im}(v) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in which the rows are exact and c is a monomorphism, i.e. in which $\mathrm{Ker}(a) \cong \mathrm{Ker}(y_{jj'})$. The system (Y_j) is thus essentially monomorphic since the system $(\mathrm{Ker}(v))$ is .

Similar considerations occur in the proofs of the other statements and are left to the reader.

6. The derived functors of $\varprojlim : \underline{PRO}(\underline{A}) \to \underline{A}$.

If the abelian category $\underline{A}$ admits products, limits of functors over index categories always exist in $\underline{A}$ and the functor of $\underline{PRO}(\underline{A})$ into $\underline{A}$ defined through the assignment "$F \mapsto \varprojlim F$" defines an adjoint to the canonical exact embedding $h' : \underline{A} \hookrightarrow \underline{PRO}(\underline{A})$. As it is characterized by a natural isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{\underline{PRO}(\underline{A})}(h'_X, F) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(X, \varprojlim F)$$

it is left exact and we may investigate its (right) derived functors $R^q \varprojlim$. When they exist we shall denote them by $\varprojlim^{(n)}$ for $n \geq 0$ to distinguish them from those of the functor $\varprojlim_I : \underline{Hom}(I, \underline{A}) \to \underline{A}$ which we denote by $\varprojlim_I^{(n)}$, $n \geq 0$. Note that one always has the relation "$\varprojlim$ ("$\varprojlim_I$" X_i) = $\varprojlim_I X_j$" and that since $\underline{A}$ has finite products, the category $\underline{PRO}(\underline{A})$ has arbitrary products of familes of objects in $\underline{A}$ simply byre-indexing over the <u>filtered</u> index category $\mathfrak{P}_f^{op}(I)$ of finite subsets of the index set I via "$S \mapsto \prod_{i \in S} X_i$".

In contrast to the category $\underline{Hom}(I, \underline{A})$, $\underline{PRO}(\underline{A})$ does not in general posses sufficiently many injectives when $\underline{A}$ does. It will be seen, however, that under these circumstances $\underline{PRO}(\underline{A})$ does have sufficiently many objects acyclic for $\varprojlim$ and thus $\varprojlim$ may be devired in a convenient fashion. Specifically we prove the following theorem.

6.1. Theorem.

Let A be an abelian category with exact products (AB4*) and sufficiently many injectives. Then

1) every object F in $\underline{PRO}(\underline{A})$ admits a monomorphism into an object of the from "$\prod_{e \in E}$" I_e, where the I_e are injective objects in $\underline{A}$, and

2) if $0 \to$ "$\prod_{e \in E_1}$" $I_e^1 \to$ "$\prod_{e \in E_2}$" $I_e^2 \to \dots$ is an exact sequence in $\underline{PRO}(\underline{A})$ composed of such objects, then the sequence $0 \to \prod_{e \in E_1} I_e^1 \to \prod_{e \in E_2} I_e^2 \to \dots$ in $\underline{A}$ obtained by application of $\varprojlim$ is exact.

It is a well known theorem of the general theory of **derived** categories that under these two conditions one has a resolution $F \hookrightarrow C^*(F)$ of any object F in $\underline{PRO}(\underline{A})$ by such $\varprojlim$ -acyclic objects for which $R^q \varprojlim(F) \simeq H^q(\varprojlim C^*(F))$ for $q \geq 0$ and that in fact for all $n \geq 0$, $\varprojlim^{(n)}(F) \simeq \varprojlim_I^{(n)}(F)$. i.e. the derivation is dependant only on tho PRO-object involved and not any particular projective system which serves to represent it.

The requirement 1) is easily satisfied. In effect given any $F \simeq \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i$ in $\underline{PRO}(\underline{A})$ one always has the canonical monomorphism $\text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i \hookrightarrow \text{"}\prod_{i\in I}\text{"} X_i$, and since each object in A can be embedded in an injective one, one has a monomorphism $\text{"}\prod_{i\in I}\text{"} X_j \hookrightarrow \text{"}\prod_{i\in I}\text{"} I_i$, so that $F \hookrightarrow \text{"}\prod_{i\in I}\text{"} I_i$ as desired.

The second requirement is more difficult to verify. In effect consider any segment :

$$0 \to \text{"}\prod_{e\in E_o}\text{"} I_e^o \xrightarrow{u^o} \text{"}\prod_{e\in E_1}\text{"} I_e^1 \xrightarrow{u^1} \cdots \to \text{"}\prod_{e\in F_n}\text{"} I_e^n$$

of the given exact sequence.

The construction of Lemma 3.6. may be used to produce a single filtered index category J supplied with co-initial functors $\varphi_r : J \to \mathfrak{P}_f^o(E_r)$ such that if we designate by $I_*^r : \mathfrak{P}_f^o(E_r) \to \underline{A}$ the projective systems which serve to define the pro-objects $\text{"}\prod_{e\in E^r}\text{"} I_e^r$, we have a complex

$$M_J : 0 \to \varphi_o(I_*^o) \xrightarrow{d^o} \varphi_1(I_*^1) \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow \varphi_n(I_*^n)$$

of projective systems indexed by J for which $\text{"}\varprojlim_J\text{"} \varphi_r(I_*^r) \simeq \text{"}\prod_{c\in E^r}\text{"} I_e^r$ and $\text{"}\varprojlim_J\text{"} d^r = u^r$ for each r.

The complex M_j is not exact, but since the complex of pro-objects which it defines is exact, it at least has co-homology consisiting of essentially null projective systems all indexed by J. i.e. the complex M_j gives rise to the sequence of exact sequences in $\underline{Hom}(J,\underline{A})$,

$$0 \to H^0(M_j) \to \varphi_0(I_*^0) \to B^1(M_j) \to 0$$
$$0 \to B^1(M_j) \to Z^1(M_j) \to H^1(M_j) \to 0$$
$$0 \to Z^1(M_j) \to \varphi_1(I_*^1) \to B^2(M_j) \to 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

in which the pro-objects defined by $H^1(M_j)$ are all null. Thus to show that the original sequence is carried into an exact sequence in $\underline{A}$ it will suffice to show that these sequences are carried by $\varinjlim_J$ into exact sequences in $\underline{A}$. To do this it will suffice to show that each of the objects F involved in these sequences is such that $\varprojlim_J^{(n)} F = 0$ for all $n > 0$. For the sequences involved here it will, in fact, suffice to prove that $\varprojlim_J^{(n)} H^r(M_j) = 0$ for all $(n) > 0$ and also that $\varprojlim_J^{(n)} \varphi_r(I_*^r) = 0$ for all $n > 0$ since we are reduced to isomorphisms in the limit.

The assertion for $H^r(M_j)$ is thus verified if we can prove the lemma

6.2. Lemma.

If $F = \text{"}\varprojlim_I\text{"} X_i$ *is a pro-object essentially null, then* $\varprojlim_I^{(n)} F = 0$ *for all* $n \geq 0$.

The second type of object involved is the composite $\varphi_r(I_*^r)$ which is characterized by having the assertion $\varprojlim_{\mathfrak{B}_f^0(E^r)}^{(n)} I_*^r = 0$ for all $n > 0$ clearly true. Thus to draw this second conclusion it will suffice to prove the lemma.

6.3. Lemma.

Let $\varphi : J_1 \to J_2$ be a co-initial functor between filtered decreasing index categories and let $F : J_2 \to \underline{A}$ be a projective system. The canonical morphism $\varprojlim_{J_2}^{(n)} F \to \varprojlim_{J_1}^{(n)} F\varphi$ is an isomorphism for all $n \geq 0$.

The simpler case of this lemma for a co-initial categories has been established by Roos (5) .

To complete the proof of Theorem 6.1. it will suffice to prove Lemma 6.3. since 6.3. implies 6.2. . To see this suppose given a projective system $F : I \to A$ which is essentially null. The functor F admits an extension $\underline{\mathrm{Im}}\, F : I^2 \to A$ to the arrow category $I^2 = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha < \beta \text{ and } \alpha,\beta \in I\}$ of I by simply taking $\underline{\mathrm{Im}}\, F(\alpha,\beta) = \mathrm{Im}\, F_{\alpha\beta}$ in $\underline{A}$. Moreover the identity assignment functor $\Pi : I \to I^2$ defined by "$\alpha \to (\alpha,\alpha)$" is co-initial and one has, upto isomorphism, $\underline{\mathrm{Im}}\, F . \pi = F$. Since F is essentially null, the category I^2 contains a co-initial subcategory $K \hookrightarrow I^2$ such that $\mathrm{Im}\, F|K$ is null . By Lemma 6.3. we thus have $\varprojlim_I{}^{(n)} F \to \varprojlim_{I^2}{}^{(n)} \underline{\mathrm{Im}}\, F \simeq \varprojlim_K{}^{(n)} \mathrm{Im}\, F K = 0$ for all $n \geq 0$.

The remainder of this article is consecrated to the proof of Lemma 6.3. .

Proof of Lemma 6.3.

The proof will be done in two steps. The first will deal with the special case where the category $\underline{A}$ is that of (small) modules over a (small) ring R . There one has sufficiently many projectives and consequently so has the category $\underline{\mathrm{Hom}}(J,\underline{A})$ for any index category J . Moreover, since we have here the isomorphisms

$$\varprojlim_J F \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(R, \varprojlim_J F) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O},F) \quad (= \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(J,\underline{A})}(\mathcal{O},F))$$

(where $\mathcal{O}$ is the constant projective system whose value is the base ring R), to calculate the projective limit it suffices to take a projective resolution $L^\circ \to \mathcal{O}$ of the constant system $\mathcal{O}$ and take the co-homology of the resulting complex $\underline{\mathrm{Hom}}^\circ(L^\circ,F)$.

With $\varphi : J_1 \to J_2$ the given co-initial functor, designate by $\varphi_* : \underline{\mathrm{Hom}}(J_2,\underline{A}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(J_1,\underline{A})$ the functor "composition with φ" defined by "$F \mapsto F\varphi$" between the functor categories. The functor φ_* admits co-adjoint φ^* which is defined by "pull back" via the Kan formula

$$\varphi^* F(\alpha) = \varinjlim_{J_{1/\alpha}} F\, \mathrm{pr}_\alpha \quad , \text{ where } J_{1/\alpha} = \{\xi \mid \varphi(\xi) < \alpha\}$$

is the subcategory of "objects above $\alpha \in J_2$" defined by the cartesian square

$$\begin{tikzcd} J_{1/\alpha} \arrow[r] \arrow[d, hook, "pr_\alpha"'] & J_{2/\alpha} \arrow[d, hook, "\$_\alpha"] \\ J_1 \arrow[r, "\varphi"] & J_2 \end{tikzcd}$$

in (CAT) with $J_{2/\alpha}$ the category of objects of J_2 above $\alpha \in Ob(J_2)$. Observe that since φ is co-initial, $J_{1/\alpha}$ is never void, and that since φ_* is exact, the functor φ^* carries projective objects into projective objects. Since $J_{1/\alpha}$ is never void, if F is a constant system in $\underline{Hom}(J_1,\underline{A})$, $\varphi^* F$ is the constant system in $\underline{Hom}(J_2,\underline{A})$ with the same value in $\underline{A}$ as F.

Thus let $L^\circ \to \mathcal{O}$ be a projective resolution in $\underline{Hom}(J_1,\underline{A})$ of the constant system whose value is the base ring $\varphi^*(L^\circ) \to \varphi^*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ is then a projective complex in $\underline{Hom}(J_2,\underline{A})$ whose cohomology gives the left derived functors of φ^* applied to the system $\mathcal{O}$. To complete the proof of 6.3. in this special case, it will then suffice to prove that $\varphi^*(L^\circ) \to \mathcal{O}$ is a projective <u>resolution</u> of $\mathcal{O}$, for the adjunction isomorphisms

$$Hom^\circ(L^\circ,\varphi_* F) \simeq Hom^\circ(\varphi^*(L^\circ),F)$$

will immediately furnish the desired isomorphisms of the derived functors of $\varprojlim$. i.e. it will suffice to show that $L_q\, \varphi^*(\mathcal{O}) = 0$ for all $q > 0$. Now to calculate $L_q \varphi^*(F)$ we note that since $\varphi^*(F)(\alpha) = \varinjlim_{J_{1/\alpha}} F\, pr_\alpha$ we have that $L_q\, \varphi^*(F)(\alpha) = L_q \varinjlim_{J_{1/\alpha}} F\, pr_\alpha$ since a projective resolution $L^\circ \to F$ of F is carried by restriction to $J_{1/\alpha}$ into a projection resolution of $F\, pr_\alpha$. We thus wish to show that for each $\alpha \in J_2$, $L_q \varinjlim_{J_{1/\alpha}} (\mathcal{O}) = 0$ for $q > 0$. As the categories $J_{1/\alpha}$ are filtered decreasing for each α we are finally led to the following lemma.

7.1. Lemma .

Let J be a filtered decreasing index category and let $\mathcal{O}$ be the constant system on J whose value is the base ring R of a category $\underline{A}$ of small modules over R . Then for all $q > 0$ $L_q \varinjlim_J (\mathcal{O}) = 0$.

For the proof of 7.1. we recall a few definitions. For each $n \in \mathbb{N}$, let Δ_n be the index category defined by the set $\{0,1,\ldots,n\}$ with its natural order and for each i $(0 \leq i \leq n+1)$ let $d_n^i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ be the functor defined by

$$d_n^i(k) = \begin{cases} k & 0 \leq k < i \\ k+1 & i \leq k \leq n \end{cases} .$$

With this notation, the semi-simplical decomposition of a category J is the semi-simplicial set $F\ell_\cdot(J)$ defined by the sets of functors

$$F\ell_n(J) = \mathrm{Hom}_{CAT}(\Delta_n, J) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\text{with} \quad d_n^i(J) = F\ell_{n+1}(J) \to F\ell_n(J) \quad \text{for } n \geq 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq i \leq n+1$$

given by $\mathrm{Hom}_{CAT}(d_n^i, J)$. For J an index category and $\underline{A}$ an abelian category with exact products, the Roos Complex (Roos, 5) Π^*F of the functor $F : J \to A$ in $\underline{A}$ may be defined by

$$\Pi^n F = \Pi\, F\, d_o^o\, d_1^o \ldots d_{n-1}^o(J)\,(\xi) \quad , \quad n \geq 0$$
$$\xi \in F\ell_n(J)$$

and $d^n : \Pi^n F \to \Pi^{n+1} F$ given by

$$(d^n)_\xi = F\, d_1^o \ldots d_n^o(\xi) \mathrm{pr}_{d_n^{n+1}(\xi)} + \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \mathrm{pr}_{d_n^k(\xi)} \quad , \quad \xi \in F\ell_{n+1}(J)$$

where we have identified the sets $F\ell_o(J)$ and $F\ell_1(J)$ with the sets $\mathrm{Ob}(J)$ and $F\ell(J)$, respectively .

It is then the case (Roos, 5) that

$$H^o(\Pi^*F) \simeq \varprojlim F \quad \text{and} \quad R^q \varprojlim(F) \simeq H^q(\Pi^*F) .$$

The category $\underline{A}$ of modules over R has exact sums, thus we may compute $\varinjlim_J{}^{(n)} F$ via the Roos complex of the functor $F^o : J^o \to \underline{A}^o$. In $\underline{A}$ we then have $H_o(\amalg_* F) = \varinjlim_J F$ and $L_q \varinjlim F \cong H_q(\amalg_* F)$.

To complete the proof of 7.1. it will thus suffice to show that in the case of the constant system $\mathcal{O}$ whose value is the base ring R, the complex $\amalg_* 0$ is acyclic.

But this is readily seen without further computation by the observation that 7.1. is true without assumption on F when J is filtered increasing, for $\varinjlim$ is then exact. Furthermore in the case of the constant functor $\mathcal{O} : J \to \underline{A}$ the complex $\amalg_* 0$ is nothing other than the canonical resolution $F_*(J)$ of the category J (relative to $\underline{A}$) given by $F_n(J) = F(F\ell_n(J))$, the free R-module generated by the set $F\ell_n(J)$ with differential given by the induced homomorphism

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F(d_n^k(J)) .$$

The homology of this complex clearly does not change by passage to the opposite category J^o. Thus we have

$$L_q \varinjlim_J (\mathcal{O}) \cong H_q(F_*(J)) \cong H_q(F_*(J^o)) \cong L_q \varinjlim_{J^o} (\mathcal{O}) = 0 .$$

Q.E.D.

This completes the proof of 6.3. in the special case.

To complete the proof for the general case we use the result of Gabriel and Popescu (6) which allows us to treat an arbitrary abelian category as an exact retract of some category of modules over some convenient ($\mathcal{U}$-small) ring.

More precisely, there exists a fully faithful functor $i : \underline{A} \to A^1$ of the given abelian category $\underline{A}$ into a category $\underline{A}^1$ of modules which admits an exact co-adjoint ass : $\underline{A}^1 \to \underline{A}$.

If we let $F : J \to \underline{A}$ be a projective system in $\underline{A}$, we may calculate the projective limit in $\underline{A}$ using the limit in $\underline{A}^1$ by means of the isomorphism

$$\varprojlim_J F \simeq \text{ass} \varprojlim_J iF .$$

i admits an exact co-adjoint, hence preserves injectives, and ass is exact, thus this composition of functors gives rise to a spectral sequence

$$E^2_{pq} = \text{ass} \varprojlim_J{}^{(p)} R^q\, iF \Rightarrow \varprojlim_J{}^{(p+q)} F$$

which converges to the derived functors of $\varprojlim_J$ (suitably filtered). Thus the categories J_1 and J_2 supplied with the co-initial functor $\varphi : J_1 \to J_2$ give rise to the spectral sequences

$$'E^2_{pq} = \text{ass} \varprojlim_{J_1}{}^{(pq)} R^q iF \Rightarrow \varprojlim_{J_2}{}^{(p+q)} F \;,\; ''E^2_{pq} = \text{ass} \varprojlim_{J_1}{}^{(p)} R^q i(F\varphi) \Rightarrow \varprojlim_{J_1}{}^{(p+q)} (F\varphi)$$

converging to the limits of the general case. But Lemma 6.3. in the special case of modules which we have just establised shows that we have $'E^2_{pq} \simeq ''E^2_{pq}$ The terms of the two sequences are thus isomorphic and we thus have an isomorphism $\varprojlim_{J_2}{}^{(p)} F \simeq \varprojlim_{J_1}{}^{(p)} F\varphi$ as desired.

Q.E.D.

8. Applications.

The dependance of $\varprojlim^{(n)} F$ only on the pro-object defined by the projective system F now established allows us to immediately extend a number of results established (largely) by Roos (5), (6) to projective systems only essentially of a given type.

Recalling that a projective system is essentially countable provided the pro-object which it defines is isomorphic to one defined over a countable index category, we have the theorem

8.1. Theorem.

1) Let F be a projective system essentially countable in a category of modules ; then $\varprojlim^{(n)} F = 0$ for $n \geq 2$.

2) Let F be an essentially countable system of modules which also verifies the Mittag-Leffler condition (M.L.) ; then $\varprojlim^{(n)} F = 0$ for $n > 0$.

3) Let F be an essentially countable system with values in the category of sheaves over a space which has strict topological dimension k ; then

$$\varprojlim^{(n)} F = 0 \quad \text{for} \quad n > k + 1 .$$

Finally, recalling that a projective system of modules is essentially of finite type provided it defines a pro-object essentially of type $\underline{A}'$, where $\underline{A}'$ is the subcategory of modules of finite type, we have

4) Let F be a projective system essentially of finite type of modules over an p-dimensional quotient ring of a regular ring, then $\varprojlim^{(n)} F = 0$ for $n > p$.

REFERENCES

(1) A. GROTHENDIECK.- Sem. Bourbaki, exp. 195, février 1960 .

(2) DELIGNE.- Residues and duality, Hartshorn Seminar, Springer Math. Notes N° 20, Appendix N° 1, p. 404 .

(3) J.L. VERDIER.- Equivalence essentielle des systèmes projectifs.- C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 4950-4953 .

(4) O.A. LAUDAL.- Sur la limite projective et la théorie de la dimension.- Faculté des Sciences de Paris, Séminaire de Topologie et de Géométrie différentielle.- C. Ehresmann, 1961 .

(5) J.E. ROOS.- C.R. 252, 1961, p. 3702 .

(6) J.E. ROOS.- C.R. 254, 1962, p. 155 .

(7) P. GABRIEL and N. POPESCU.- C.R. 258, 1964, p. 4188 .

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Jahrgang 1966/67

Vortrag 7

DIE SÄTZE VON BOREL-WILDER

von Robert FITTLER

Es sei X ein lokal kompakter, topologischer Raum, A ein links-noetherscher Ring mit Eins und $F^{\bullet}$ ein Komplex von A-Modulgarben über X.

Mit $\underline{H}^q$ bzw. $\underline{H}^q_c$ bezeichnen wir die Hyperkohomologie bzw. die Hyperkohomologie mit kompakten Trägern. $\mathcal{H}^q$ ist die Kohomologie in der Kategorie der A-Modulgarben über X.

1. <u>Satz</u>.

Falls gilt $\mathcal{H}^q F^{\bullet} = 0$ für genügend kleine q, d.h. $q < q_1$, dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) Für alle $x \in X$ und alle $q < q_o$ ist $\varinjlim_{x \in \mathcal{U}} \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^{\bullet}) = 0$.

(ii) Für alle offenen $V \subset X$ und alle $q < q_o$ ist $\underline{H}^q(V, F^{\bullet}) = 0$.

<u>Beweis</u>. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial.

(i) $\Rightarrow$ (ii): weil gilt $\mathcal{H}^q F^{\bullet} = 0$ für $q < q_1$, existiert ein zu $F^{\bullet}$ quasi-isomorpher Komplex $I^{\bullet}$ von injektiver A-Modulgarben. Da nun gilt

$$\varinjlim_{x \in \mathcal{U}} \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^{\bullet}) = \varinjlim_{x \in \mathcal{U}} H^q \Gamma(\mathcal{U}, I^{\bullet}) = (\mathcal{H}^q(I^{\bullet}))_x = (\mathcal{H}^q F^{\bullet})_x$$

sind die beiden (horizontalen) Garbenkomplexe

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_{q_o-1} \arrow[r] \arrow[d] & F_{q_o} \arrow[r] \arrow[d] & F_{q_o+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & F_{q_o}/\operatorname{im} F_{q_o-1} \arrow[r] & F_{q_o+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wegen I. quasi-isomorph. Beim unteren ist $\underline{H}^q(\mathcal{U},-) = 0$ für $q < q_o$, also auch beim oberen Komplex.

w.z.b.w.

2. <u>Satz</u>.

Sei die topologische Dimension A-dimtop X von X endlich und der Garbenkomplex $F^\bullet$ positiv. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent.

(i) Für alle $x \in X$ ist das projektive System

$$x \in \mathcal{U} \mapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U},F^\bullet)$$

im wesentlichen Null für alle $q > q_o$.

(ii) Für alle offenen $W \subset X$ und alle $q > q_o$ gilt $\underline{H}_c^q(W,F^\bullet) = 0$.

<u>Beweis</u>. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial.
(i) $\Rightarrow$ (ii):

A-dimtop $X < +\infty$ bedeuted: für alle q erlaubt F^q eine beschränkt lange c-weiche Auflösung. Also gilt für grosse q d.h. $q > q_1$, $\underline{H}_c^q(W,F^\bullet) = 0$. Dabei ist $q_1 \geq q_o$. Falls nun gezeigt werden kann, dass $\mathcal{U} \mapsto \underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet)$ eine Kogarbe ist, d.h. dass die Folge

$$\coprod_{\alpha,\beta} \underline{H}_c^{q_1}(V_\alpha \cap V_\beta,F^\bullet) \to \coprod_\alpha \underline{H}_c^{q_1}(V_\alpha,F^\bullet) \to \coprod \underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet) \to 0$$

exakt ist für jede offene Überdeckung $\{V_\alpha\}$ einer beliebigen offenen $\mathcal{U} \subset X$, dann folgt, dass $\mathcal{U} \mapsto \mathrm{Hom}_A(\underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet),M)$ für jeden A-Modul M eine Garbe ist. Wegen I. verschwinden ihre Halme. Also ist die Garbe null. Daraus folgt, das $\underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet) = 0$ ist.

Zum Beweis der Kogarbeneigenschaft betrachtet man den folgenden semi-simplizialen Doppelkomplex $C^{\bullet\bullet}$ von Garben

$$\cdots \rightrightarrows \coprod_{\alpha,\beta} F^\bullet_{V_\alpha \cap V_\beta} \rightrightarrows \coprod_\alpha F^\bullet_{V_\alpha} \to 0 \to 0 \cdots$$

Der zugehörige Doppel-Ketten-Komplex ist quasi-isomorph zu

$$\cdots \to 0 \to F^\bullet_{\mathcal{U}} \to 0 \to 0 \cdots$$

Anwenden des Funktors $\underline{H}_c^q(X,-)$ liefert die konvergente Spektralsequenz

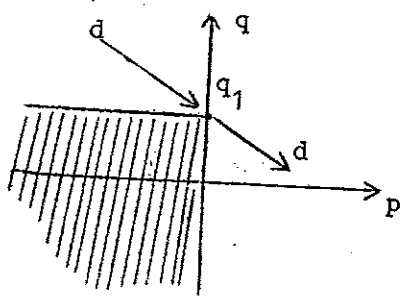
$$E_2^{pq} = H^p(\underline{H}_c^q(X,C^{qp}) \Rightarrow \underline{H}_c^{p+q}(X,F^\bullet_{\mathcal{U}}) = \underline{H}_c^{p+q}(\mathcal{U},F^\bullet)$$

(Das ergibt sich daraus, dass man E_2^{pq} als iterierte Homologie $H'H''$ eines Doppelkomplexes

$$\cdots \to \Gamma_c W^{\bullet 1} \to \Gamma_c W^{\bullet 2} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

erhalten kann. Dabei ist $W^{\bullet\bullet}$ ein Doppelkomplex von c-weichen Garben, der in beiden Dichtungen quasi-isomorph zu $C^{\bullet\bullet}$ ist).

Beachtet man nun, dass die von Null verschiedenen E_2^{pq} im schraffierten Teil des folgenden Diagramms liegen



so folgt $E_2^{oq_1} \cong E_3^{oq_1} = \cdots = E_\infty^{oq_1}$.

Nun ist einerseits

$$E_2^{oq_1} = H^o\,\underline{H}_c^{q_1}(X,C^{\bullet\bullet}) \quad \text{nach Definition,}$$

und anderseitz

$$E_\infty^{oq_1} = \underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet) \quad \text{wegen der angegebenen Konvergenz .}$$

Also gilt $H^o H_c^{q_1}(X,C^{\bullet\bullet}) = \underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet)$, d.h. die Folge

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to \underline{H}_c^{q_1}(X, \coprod\limits_{\alpha,\beta} F^\bullet_{V_\alpha \cap V_\beta}) & \to & \underline{H}_c^{q_1}(X, \coprod\limits_{\alpha} F_{V_\alpha}) & \to & \underline{H}_c^{q_1}(\mathcal{U},F^\bullet) & \to & 0 \\
\wr\| & & \wr\| & & & & \\
\coprod\limits_{\alpha,\beta} \underline{H}_c^{q_1}(V_\alpha \cap V_\beta,F^\bullet) & & \coprod \underline{H}_c^{q_1}(V_\alpha,F^\bullet) & & & &
\end{array}$$

ist exakt.

w.z.b.w.

3 . <u>Satz</u> .

Sei wieder A-dimtop X endlich. Der Garbenkomplex $F^\bullet$ sei beidseitig beschränkt. Dann sind die folgenden sechs Aussagen äquivalent.

(i) Für alle $x \in X$ und alle q ist das induktive System (in der Kategorie $\underline{A}$ der A-Moduln)

$$x \in \mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ.

(ii) Für alle kompakten $K \subset X$ und alle q ist das induktive System (in $\underline{A}$)

$$K \subset \mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ .

(iii) Für alle kompakten $K \subset X$ und alle q ist das induktive System (in der derivierten Kategorie $D^b(\underline{A})$ von $\underline{A}$)

$$K \subset \mathcal{U} \longmapsto R\Gamma(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ .

(iv) Für alle $x \in X$ und alle q ist das projektive System (in der Kategorie $\underline{A}$)

$$x \in \mathcal{U} \longmapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ .

(v) Für alle kompakten $K \subset X$ und alle q ist das projektive System (in $\underline{A}$)

$$K \subset \mathcal{U} \longmapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ .

(vi) Für alle kompakten $K \subset X$ und alle q ist das projektive System (in $D^b(\underline{A})$)

$$K \subset \mathcal{U} \longmapsto R\Gamma_c(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

im wesentlichen von endlichem Typ .

4 . Bemerkung .

Ist z. B. ein kompakter Raum X mit der lokalen Eigenschaft (i) gegeben, so folgt aus 3. (ii) dass $\underline{H}^q(X,F^\bullet)$ von endlichem Typ ist .

Beweis des 3. Satzes :

Die Schlüsse (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) und (vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) sind einfach.

z. B. (iii) $\Rightarrow$ (ii) :

Sei $I^\bullet$ ein zu $F^\bullet$ quasi-isomorpher Garbenkomplex aus injektiven A-Modulgarben.

(iii) besagt, dass zu $\mathcal{U}$ mit $K \subset \mathcal{U}$ ein V mit $K \subset V \subset \mathcal{U}$ existiert mit der Eigenschaft, dass die Restriktionsabbildung $\Gamma(\mathcal{U},I^\bullet) \to \Gamma(V,I^\bullet)$ durch einen Kettenkomplex C faktorisiert, der quasi-isomorph ist zu einem Kettenkomplex C', der in jeder Dimension von endlichem Typ ist. Also faktorisiert $\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \to \underline{H}^q(V,F^\bullet)$ durch den Modul $H^q(C) \cong H^q(C')$, der von endlichem Typ ist in jeder Dimension. Damit ist (iii) $\Rightarrow$ (ii) bewiesen .

Anschliessend an die obigen Schlüsse werden nun folgen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) und noch (ii) $\Rightarrow$ (iv) und (v) $\Rightarrow$ (i) .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Es ist für alle K zu zeigen, dass zu $\mathcal{U}$ mit $K \subset \mathcal{U}$ ein V existiert mit $K \subset V \subset \mathcal{U}$, so dass $\mathrm{im}(\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \xrightarrow{r} \underline{H}^q(V,F^\bullet))$ von endlichem Typ ist. Da X lokal kompakt, also normal ist, ist es gleichwertig, für alle K und $\mathcal{U}$ mit $K \subset \mathcal{U}$ zu zeigen, dass

$$\mathrm{im}(\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \xrightarrow{r} \underline{H}^q(K,F^\bullet))$$

von endlichem Typ ist .

Für genügend kleine q ist $\underline{H}^q(-,F^\bullet) = 0$, da $F^\bullet$ beschränkt ist . Also ist dafür die Behauptung bewiesen. Nun machen wir vollständige Induktion nach q . Für $q-1$ sei die Behauptung bewiesen. Wegen I. und der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen $\mathring{K}_i$, deren abgeschlossene Hüllen K_i kompakt sind und die noch die Eigenschaft haben, dass

$$\mathrm{im}\ (\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \xrightarrow{r_i} \underline{H}^q(K_i,F^\bullet)$$

von endlichem Typ ist .

Sei n die minimale Anzahl von solchen K_i die zu so einer Überdeckung benötigt werden. Wir werden die Annahme, dass $n > 1$ ist, auf einen Widerspruch führen, indem wir damit so eine Überdeckung mit nur $n-1$ Mengen konstruhieren. Auf Grund der Normalität von X kann man nämlich K_1 und K_2 der gegebenen Überdeckung $K_1, \ldots, K_n$ so durch K_1' und K_2' besetzen, dass gilt $K_1' \subset \mathring{K}_1$ und $K_2' \subset \mathring{K}$, und die $\mathring{K}_1'$, $\mathring{K}_2'$; $\mathring{K}_3, \ldots, \mathring{K}_n$ wieder K überdecken. Hat nun die Überdeckung, bestehend aus den $(n-1)$ offenen Mengen $(\mathring{K}_1' \cup \mathring{K}_2')$, $\mathring{K}_3, \ldots, \mathring{K}_n$, die geforderten Eigenschaften, so ist man fertig. Es ist also einzig noch zu zeigen, dass

$$\operatorname{im}\ (\underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet) \xrightarrow{r} \underline{H}^q(K_1' \cup K_2', F^\bullet))$$

von endlichem Typ ist. Dazu wendet man auf das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^\bullet_{K_1 \cup K_2} \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_{K_1} \oplus F^\bullet_{K_2} \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_{K_1 \cap K_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^\bullet_{K_1' \cup K_2'} \arrow[r] & F^\bullet_{K_1'} \oplus F^\bullet_{K_2'} \arrow[r] & F^\bullet_{K_1' \cap K_2'} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

den Funktor $\underline{H}^q_c(X,-)$ bzw. $\underline{H}^{q-1}_c(X,-)$ an und erhält die zugehörigen langen Homologie sequenzen. Berücksichtigt man noch, dass allgemein gilt

$$\underline{H}^p_c(X, F^\bullet_W) \cong \underline{H}^p(W, F^\bullet)$$

für kompakten W, dann ergibt sich das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen :

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^{q-1}(K_1 \cap K_2, F^\bullet) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & \underline{H}^q(K_1 \cup K_2, F^\bullet) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & \underline{H}^q(K_1, F^\bullet) \oplus \underline{H}^q(K_2, F^\bullet) \arrow[d] \\
\underline{H}^{q-1}(K_1' \cap K_2', F^\bullet) \arrow[r, "\gamma"] & \underline{H}^q(K_1' \cup K_2', F^\bullet) \arrow[r] & \underline{H}^q(K_1', F^\bullet) \oplus \underline{H}^q(K_2', F^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Projiziert man die Kategorie $\underline{A}$ der A-Moduln nun noch auf die Kategorie $\underline{A}/\underline{A}$ e.T. der A-Moduln modulo der endlich erzeugten A-Moduln, so bleiben

exakte Folgen exakt, da der Ring A nach Voraussetzung noethersch ist. Nun faktorisiert der Homomorphismus $\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \xrightarrow{r} \underline{H}^q(K_1' \cup K_2',F^\bullet)$ sicher durch β

$$r : \underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \xrightarrow{\alpha} \underline{H}^q(K_1 \cup K_2,F^\bullet) \xrightarrow{\beta} \underline{H}^q(K_1' \cup K_2',F^\bullet) .$$

Dabei ist $\alpha\psi : \underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \to \underline{H}^q(K_1,F^\bullet) \oplus \underline{H}^q(K_2,F^\bullet)$ Null in $\underline{A}/\underline{A}$ e.T. auf Grund der Annahmen über die K_i. Also gilt $\operatorname{im}\alpha \subset \operatorname{im}\varphi$, d.h. es ist $\operatorname{im} r \subset \operatorname{im}(\gamma\delta)$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung ist $\delta = 0$. Also gilt $r = 0$ (immer in $\underline{A}/\underline{A}$ e.T.).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Es ist zu zeigen, dass das induktive System

$$K \subset \mathcal{U} \longmapsto R\Gamma(\mathcal{U},F^\bullet)$$

in der Kategorie $D^b(\underline{A})/D^b_{\underline{A}\text{ e.T.}}(\underline{A})$ im wesentlichen Null ist, für alle kompakten $K \subset X$ und alle q. Nun gelten die folgenden Äquivalenzen von Kategorien

$$D^b(\underline{A})/D^b_{\underline{A}\text{ e.T.}}(\underline{A}) \simeq D^b(\underline{A})/D^b(\underline{A}\text{ e.T.}) \simeq D^b(\underline{A}/\underline{A}\text{ e.T.})$$

(die erste wegen $D^b_{\underline{A}\text{ e.T.}}(\underline{A}) \simeq D^b(\underline{A}\text{ e.T.})$, und weil diese Äquivalenz mit den beiden Inklusionen in $D^b(\underline{A})$ verträglich sind ; die zweite trivialerweise). Wir beweisen darum, dass $\mathcal{U} \mapsto R\Gamma(\mathcal{U},F^\bullet)$ in $D^b(\underline{A}/\underline{A}\text{ e.T.})$ im wesentlichen Null ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $Y^\bullet \in D^b(\underline{A}/\underline{A}\text{ e.T.})$ gilt

$$\varinjlim_{K \subset \mathcal{U}} \operatorname{Hom}_{D^b(\underline{A}/\underline{A}\text{ e.T.})}(Y^\bullet, R\Gamma(\mathcal{U},F^\bullet)) = 0 .$$

Dies folgt falls gilt $\varinjlim \operatorname{Ext}^\bullet_{D^b(\underline{A}/\underline{A}\text{ e.T.})}(Y^\bullet, R\Gamma(\mathcal{U},F^\bullet)) = 0$, da $\operatorname{Hom} = \operatorname{Ext}^0$.

Im Hinblick darauf betrachten wir die Spektralsequenzen

$$E_2^{pq}(\mathcal{U}) = \operatorname{Ext}^p(Y^\bullet, \underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}(Y^\bullet, R\Gamma(\mathcal{U},F^\bullet))$$

und

$$E_2^{pq} = \varinjlim_{K\subset\mathcal{U}} E^{pq}(\mathcal{U}) = \varinjlim_{K\subset\mathcal{U}} \mathrm{Ext}^p(Y^\bullet, \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet)) \Rightarrow \varinjlim_{K\subset\mathcal{U}} \mathrm{Ext}^{p+q}(Y^\bullet, R\Gamma(\mathcal{U}, F^\bullet)) .$$

Da das projektive System $H^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$ in der Kategorie $\underline{A}/\underline{A}$ e.t. im wesentlichen null ist, transformiert ein allgemeiner additiver funktor dieses System in ein wesentlich null projektives System. Besonders

$$\varinjlim_{K\subset\mathcal{U}} \mathrm{Ext}^p_{\underline{A}/\underline{A}\ \mathrm{e.T.}}(Y^\bullet, \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet)) = 0 \quad ,$$

darauss folgt

$$\varinjlim_{K\subset\mathcal{U}} \mathrm{Ext}^p_{\underline{A}/\underline{A}\ \mathrm{e.T.}}(Y^\bullet, R\Gamma(\mathcal{U}, F^\bullet)) = 0 \quad .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : zu zeigen ist, dass es zu jedem $x \in X$ und jedem $\mathcal{U} \ni x$ ein V mit $x \in V \subset \mathcal{U}$ gibt für welches im $(\underline{H}^q_c(V, F^\bullet) \xrightarrow{r} \underline{H}^q_c(\mathcal{U}, F^\bullet))$ von endlichem Typ ist. Daher kann man sich auf solche $\mathcal{U}$ beschränken, welche in einer kompakten Teilmenge K liegen. Das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^\bullet_V \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_K \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_{K-V} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^\bullet_{\mathcal{U}} \arrow[r] & F^\bullet_{\overline{\mathcal{U}}} \arrow[r] & F^\bullet_{\overline{\mathcal{U}}-\mathcal{U}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induziert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^{q-1}(K-V, F^\bullet) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & \underline{H}^q_{(c)}(V, F^\bullet) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r"] & \underline{H}^q(K, F^\bullet) \arrow[d] \\
\underline{H}^{q-1}(\overline{\mathcal{U}} - \mathcal{U}, F^\bullet) \arrow[r, "\alpha"'] & \underline{H}^q_{(c)}(\mathcal{U}, F^\bullet) \arrow[r] & \underline{H}^q(\overline{\mathcal{U}}, F^\bullet)
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen in $\underline{A}$. Die Exaktheit bleibt erhalten beim Übergang zur Kategorie $\underline{A}/\underline{A}$ e.T.. Zum Beweis von $r = 0$ (immer in $\underline{A}/\underline{A}$ e.T.) benutz man, dass gilt $\alpha\beta = 0$, da $\beta = 0$ ist wegen (ii) ; und dass γ surjektiv ist. Zum

letzteren zeigt man, dass $\delta = 0$ ist : das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F^{\bullet}_V \arrow[rr] \arrow[dr] & & F^{\bullet}_W \arrow[dl] \\ & F^{\bullet}_K & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ und kommt von den Inklusionen $V \subset K \subset W$ her, wo W eine beliebige offene Umgebung von K ist. Also hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \underline{H}^q_c(V,F^{\bullet}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta"'] & & \underline{H}^q_c(W,F^{\bullet}) \arrow[dl] \\ & \underline{H}^q_{(c)}(K,F^{\bullet}) & \end{tikzcd}$$

und noch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \underline{H}^q_c(W,F^{\bullet}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{H}^q_{(c)}(K,F^{\bullet}) & & \underline{H}^q(W,F^{\bullet}) \arrow[ll] \end{tikzcd} .$$

Hier ist aber der horizontale Homomorphismus gleich Null wegen (ii) , also folgt $\delta = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (i) : Eigentlich muss man beweisen, dass zu jedem $x \in X$ und $\mathcal{U} \ni x$ ein V mit $x \in V \subset \mathcal{U}$ existiert, für welches im $(\underline{H}^q(\mathcal{U},F^{\bullet}) \to \underline{H}^q(V,F^{\bullet})$ von endlichem Typ ist. Doch genügt es zu zeigen, dass zu so einem $\mathcal{U}$ immer ein V mit $\bar{V} \subset \mathcal{U}$ existiert, so dass

$$\operatorname{im} (\underline{H}^q(\overline{\mathcal{U}},F^{\bullet}) \xrightarrow{r} \underline{H}^q(\bar{V},F^{\bullet}))$$

von endlichem Typ ist. Denn zu einem gegebenen $\mathcal{U}$ lässt sich ein $\mathcal{U}'$ mit $x \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ finden (auf Grund der Normalität der kompakten Umgebungen von x) und dazu gilt es also ein V , mit $\bar{V} \subset \mathcal{U}'$, für welches

$$\operatorname{im} \underline{H}^q(\overline{\mathcal{U}'},F^{\bullet}) \to H^q(\bar{V},F^{\bullet}))$$

von endlichem Typ ist. Also ist dann im $[\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \to H^q(V,F^\bullet)]$

$$= \text{ im } [\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\bullet) \to \underline{H}^q(\overline{\mathcal{U}}',F^\bullet) \to H^q(\bar{V},F^\bullet) \to H^q(V,F^\bullet)]$$

von endlichem Typ .

Sei nun ein $\mathcal{U} \ni x$ gegeben, für welches $\overline{\mathcal{U}}$ schon kompakt ist (sonst lässt es sich ersetzen durch so eine Umgebung). Dann gibt es ein V mit $x \in V \subset \bar{V} \subset \mathcal{U}$ wegen der Normalität von $\overline{\mathcal{U}}$. Auch gibt es ein offenes $W \supset \mathcal{U}$ mit $\bar{W}$ kompakt und dazu ein offenes $\mathcal{O} \supset \bar{W}$. Man hat also die folgende Situation

$$x \in V \subset \bar{V} \subset \mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset W \subset \bar{W} \subset \mathcal{O}$$

und erhält damit das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^\bullet_{W-\overline{\mathcal{U}}} \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_W \arrow[r] \arrow[d] & F^\bullet_{\overline{\mathcal{U}}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^\bullet_{O-\bar{V}} \arrow[r] & F^\bullet_{\mathcal{O}} \arrow[r] & F^\bullet_{\bar{V}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Es induziert wiederum das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen :

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^q_c(W,F^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{H}^q(\overline{\mathcal{U}},F^\bullet) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \underline{H}^{q+1}_c(W-\overline{\mathcal{U}},F^\bullet) \arrow[d, "\gamma"] \\
\underline{H}^q_c(O,F^\bullet) \arrow[r, "\delta"] & \underline{H}^q(\bar{V},F^\bullet) \arrow[r, "\alpha"] & H^{q+1}_c(O-\bar{V},F^\bullet)
\end{tikzcd}$$

in $\underline{A}$ bzw. in $\underline{A}/\underline{A}$ e.T. .

In $\underline{A}/\underline{A}$ e.T. ist $\delta = 0$ wegen (v), also ist α injektiv. Es genügt darum $\alpha r = 0$ zu verifizieren. Dies folgt, falls $\gamma = 0$ ist. γ ist aber die Zusammensetzung

$$\underline{H}^{q+1}_c(W-\overline{\mathcal{U}},F^\bullet) \to \underline{H}^{q+1}_c(\bar{W}-\mathcal{U},F^\bullet) \to \underline{H}^{q+1}_c(O-\bar{V},F^\bullet)$$

deren zweiter Faktor gleich Null ist in $\underline{A}/\underline{A}$ e.T. wegen (v) .

Es bleibt zu beweisen (iv) $\Rightarrow$ (v) .

Sei $K \subset X$ ein Kompakt und q ein Ganzes. Es genügt zu zeigen, dass eine offene Menge $K \subset V$ existiert, so dass

$$\mathrm{Im}(H^q_K(X,F) \to H^q_c(V,F))$$

von endlichem Typ ist. Diese Eigenschaft stimmt für genügend grosse q $(\text{A-dimtop}(X) < +\infty)$. Wir werden den Beweis durch absteigende Induktion nach q führen. Nehmen wir also an, dass die Eigenschaft für ein ganzes $q+1$ stimmt. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen von X , U_i , $1 \leq i \leq n$, so dass

$$\mathrm{Im}(H^q_c(U_i,F) \to H^q_c(V,F))$$

für beliebige i von endlichem Typ ist, und es muss gezeigt werden, dass man $n = 1$ nehmen kann. Nehmen wir also an, dass $n > 1$. Zeigen wir, dass man die Überdeckung U_i ersetzen kann durch eine Überdeckung von $n-1$ offenen Mengen, die dieselben Eigenschaften besitzen. Durch Kompaktheit, gibt es zwei offene Mengen U'_1 und U'_2 , so dass

$$\overline{U'_1} \subset U_1$$
$$\overline{U'_2} \subset U_2$$

und $U'_1 \cup U'_2, U_3, \ldots, U_n$ den Kompakt K überdecken. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\mathrm{Im}(H^q_c(U'_1 \cup U'_2, F) \to H^q_c(V,F))$$

von endlichem Typ ist .

Das kommutative Diagramm von Garben mit exakten Zeilen :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{U'_1 \cap U'_2} \arrow[r] \arrow[d] & F_{U'_1} \oplus F_{U'_2} \arrow[r] \arrow[d] & F_{U'_1 \cup U'_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{U_1 \cap U_2} \arrow[r] & F_{U_1} \oplus F_{U_2} \arrow[r] \arrow[d] & F_{U_1 \cup U_2} \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
 & & F_V & &
\end{tikzcd}$$

liefert das kommutative Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen :

$$\begin{tikzcd}
H_c^q(U_1', F) \oplus H_c^q(U_2', F) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^q(U_1' \cup U_2', F) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & H_c^{q+1}(U_1' \cap U_2', F) \arrow[d, "\eta"] \\
H_c^q(U_1, F) \oplus H_c^q(U_2, F) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & H_c^q(U_1 \cup U_2, F) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[dl, "\beta"] & H_c^{q+1}(U_1 \cap U_2, F) \\
H_c^q(V, F) & &
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist der Morphismus α null in $\underline{A}/\underline{A}_{e.T.}$. Infolgedessen faktorisiert der Morphismus β in dieser Kategorie durch δ . Der Morphismus $\beta\gamma$ faktorisiert also in dieser Kategorie durch η . Auf Grund der Induktionsvorraussetzung ist in dieser Kategorie der Morphismus η null. Der Morphismus $\beta\gamma$ ist also null.

w.z.b.w.

LITERATUR

A. BOREL.- Michigan Math. J. , 4, 1957, p. 227-239 .-

J.L. VERDIER.- Equivalence essentielle des systèmes projectifs.- C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (8 décembre 1965) .-

Faisceaux constructibles sur un espace localement compact.- C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262 (3 janvier 1966) .-

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG
Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Jahrgang 1966/67

Vortrag 8

KONSTRUIERBARE GARBEN

von H. ACUÑA

Sei X ein lokalkompakter, Y ein beliebiger topologischer Raum, A ein links-noetherscher Ring.

1. Definition.

Ein Komplex $F^\bullet \in D^+(Y_A)$ heisst berechenbar (calculable) falls für jedes $y \in Y$ und jedes $q \in \mathbb{Z}$ das induktive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet) \qquad (\mathcal{U} \ni y)$$

wesentlich konstant ist.

2. Definition.

Der Raum X sei von endlicher topologischer A-Dimension. Ein Komplex $F^\bullet \in D(X_A)$ heisst Koberechenbar, falls für jedes $x \in X$ und jedes $q \in \mathbb{Z}$ das projektive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q_c(\mathcal{U}, F^\bullet) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich konstant ist.

3. Satz.

Der Raum Y sei von endlicher kohomologischer A-Dimension, der Komplex $F^\bullet \in D^b(Y_A)$ sei berechenbar. Dann ist das Ind-Objekt

$$\mathcal{U} \longmapsto RH(\mathcal{U}, F^\bullet) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich konstant und isomorph zu $F^\bullet_x$.

Beweis

Die Behauptung ist äquivalent mit der folgenden Aussage : Der kanonische Morphismus

$$\varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \mathrm{Hom}_{D(A\text{-Mod.})}(L^\circ, RH(\mathcal{U}, F^\circ)) \to \mathrm{Hom}_{D(A\text{-Mod.})}(L^\circ, F^\circ_x)$$

ist ein Isomorphismus für jedes $L^\circ \in D(A\text{-Mod.})$.

Zum Beweis betrachten wir die Spektralfolgen

$$'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(L^\circ, \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\circ)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(L^\circ, RH(\mathcal{U}, F^\circ))$$

$$''E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(L^\circ, (\mathcal{H}^q F^\circ)_x) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(L^\circ, F^\circ_x) \quad .$$

Auf Grund der Voraussetzung der Berechenbarkeit ist das induktive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\circ) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich konstant. Daher sind die Funktoren $\varinjlim_{\mathcal{U}\ni x}$ und $\mathrm{Ext}^p(L^\circ, ?)$ vertauschbar, und man erhält die Beziehung

$$\varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \mathrm{Ext}^p(L^\circ, \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\circ)) = \mathrm{Ext}^p(L^\circ, \varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\circ))$$

$$= \mathrm{Ext}^p(L^\circ, (\mathcal{H}^q F^\circ)_x) \quad .$$

Also sind $\varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \mathrm{Ext}^{p+q}(L^\circ, RH(\mathcal{U}, F^\circ))$ und $\mathrm{Ext}^{p+q}(L^\circ, F^\circ_x)$ isomorph, für $p+q=0$ erhält man den gewünschten Isomorphismus.

4 . Satz .

Sei X ein parakompakter Raum, F eine berechenbare Garbe. Dann ist das induktive System

$$\mathcal{U} \longmapsto H^q(\mathcal{U}, F) ,$$

wobei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, wesentlich konstant.

Zum Beweis, der auf J.E. Roos zurück geht benutzen wir die folgenden Lemmata.

Lemma 1 .

Ist F eine berechenbare Garbe, I eine Indexmenge, und $F_i = F$ für alle $i \in I$, so gilt

$$R^q \prod_{i\in I} F_i = 0 \quad \text{für} \quad q \neq 0 \ .$$

Beweis .

Sei J eine injektive Auflösung von F. Die Halme der Garbe $R^q \prod_{i\in I} F$ im Punkte x ergeben sich folgendermassen :

$$(R^q \prod_{i\in I} F)_x = (\mathcal{H}^q(\prod J))_x = \varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} H^q(\mathcal{U}, \prod J) = \varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \prod H^q(\mathcal{U}, J) =$$

$$= \prod \varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} (H^q(\mathcal{U},F)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \neq 0 \\ \prod_{i\in I} F_x & \text{für} \quad q = 0 \end{cases}$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichheit nach Voraussetzung, die letzte, weil der Komplex der Halme für $q \neq 0$ exakt ist.

Lemma 2 .

Sei $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein induktives System von Moduln. Ist der kanonische Morphismus

$$\varinjlim_{\alpha\in A} \prod_I (M_\alpha) \longrightarrow \prod_I \varinjlim_{\alpha\in A} M_\alpha$$

für jede Indexmenge I ein Isomorphismus, so ist das System $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ wesentlich konstant .

Beweis .

Wir haben eine exakte Folge induktiver Systeme

$$0 \to \operatorname{Ker} f_\alpha \to M_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} \varinjlim_{\alpha \in A} M_\alpha \to \operatorname{KoKer} f_\alpha \to 0 \quad .$$

Für Moduln ist $\prod_I$ ein exakter Funktor, somit ist die Folge

$$0 \to \prod_I \operatorname{Ker} f_\alpha \to \prod_I M_\alpha \xrightarrow{\pi f_\alpha} \prod_I \varinjlim_\alpha M_\alpha \to \prod_I \operatorname{KoKer} f_\alpha \to 0$$

exakt. Hieraus, zusammen mit der Annahme, ergibt sich :

(1) $\varinjlim_\alpha \prod_I \operatorname{Ker} f_\alpha = 0$ und (2) $\varinjlim_\alpha \prod_I \operatorname{KoKer} f_\alpha = 0$.

Zu zeigen ist, dass $\operatorname{Ker} f_\alpha$ und $\operatorname{KoKer} f_\alpha$ wesentlich null sind.

Für ein gegebenes α sei $\operatorname{Ker} f_\alpha$ von einer Familie $(x_j)_{j \in J}$ erzeugt. Nach (1) folgt für $I = J$: es existiert ein $\beta > \alpha$, sodass $(x_j)_{j \in J}$ durch den Übergangsmorphismus

$$\prod_J \operatorname{Ker} f_\alpha \longrightarrow \prod_J \operatorname{Ker} f_\beta$$

auf das Nullelement abgebildet wird. Also ist

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Ker} f_\alpha \to \operatorname{Ker} f_\beta)$$

gleich null .

Der Beweis für den KoKern verläuft analog .

<u>Beweis des Satzes</u> : Der Raum X ist parakompakt, daher stimmt die Čech'sche Kohomologie mit der "Üblichen" Kohomologie überein :

$$\check{H}^q(X,F) = H^q(X,F)$$

für jedes q . Dabei gilt nach Definition :

$$\check{H}^q(X,F) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},F) \ ,$$

wobei $H^q(\mathcal{U},F)$ definiert ist als q-tes Kohomologie-Objekt des Komplexes

$$\to \prod_i F(\mathcal{U}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \substack{\to\\\to\\\to} \prod_{i,j,k} F(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k) \substack{\to\\\to\\\to\\\to} \cdots$$

wenn $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ die gegebene Überdeckung ist. Als induktives System betrachtet man dann das System der eigentlichen Überdeckungen, mit "Verfeinerung" als Ordnungsrelation.

Für eine beliebige Indexmenge J gilt die Gleichheit :

$$\prod_I (\prod_J F_j)(\mathcal{U}_i) = \prod_J \prod_I F_j(\mathcal{U}_i) \quad .$$

Daraus folgt nach der Definition von $H^q(\mathcal{U}, F)$, dass der kanonische Morphismus

$$\mathcal{U} : H^q(\mathcal{U}, \prod_J F_j) \longrightarrow \prod_J H^q(\mathcal{U}, F_j)$$

ein Isomorphismus ist. Wir betrachten das kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{U}, \prod_J F_j) & \xrightarrow{u} & \prod_J H^q(\mathcal{U}, F_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X, \prod_J F_j) & \xrightarrow{v} & \prod_J H^q(X, F_j) \end{array}$$

wohin die senkrechten Pfeile den Übergang von der Čech'schen zur "gewöhnlichen" Kohomologie bedeuten. Die Abbildung u ist ein Isomorphismus, und wir behaupten dass v ebenfalls ein Isomorphismus ist . Für $q = 0$ sind

$$H^0(X, \prod_J F_j) \quad \text{und} \quad \prod H^0(X, F_j)$$

kanonisch isomorph. Daher konvergieren die Spektralfolgen

$$(1) \qquad {}'E_2^{p,q} = H^p(X, \Pi^{(q)} F_j) \Rightarrow R^{p+q}(H^0(X, \prod_J F_j))$$

$$(2) \qquad {}''E_2^{p,q} = \Pi^{(p)} H^q(X, F_j) \Rightarrow R^{p+q}(\Pi H^0(X, F_j))$$

gegen isomorphe Objekte.

Die Spektralfolge (1) ist degeneriert, weil die berechenbare Garbe F Π-azyklisch ist (Lemma 1). Also gilt ${}'E_2^{p,q} = {}'E_\infty^{p,q}$. Die Spektralfolge (2) ist ebenfalls degeneriert, weil der Funktor Π exakt für Moduln ist. Also gilt ${}''E_2^{p,q} = {}''E_\infty^{p,q}$. Hieraus folgt (Godement [2], Satz I, 4.4.1.) dass die Terme ${}'E_2^{p,o}$ und ${}''E_2^{o,p}$ isomorph sind. Dies war unsere Behauptung. Gehen wir jetzt zum Limes über, so bekommen wir die Gleichheit

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \prod_J F_j) = \check{H}^q(X, \prod_J F_j) = H^q(X, \prod_J F_j) =$$
$$= \prod_J H^q(X, F_j) = \prod_J \check{H}^q(X, F_j) = \prod_J \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, F_j) \quad .$$

Dies zusammen mit dem Isomorphismus $\mathcal{U}$ liefert uns einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \prod_J H^q(\mathcal{U}, F) \simeq \prod_J \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, F)$$

(wir haben $F_j = F$ für alle j gesetzt) .

Nach dem Lemma 2 folgt dann, dass das System

$$\mathcal{U} \longmapsto H^q(\mathcal{U}, F)$$

wesentlich konstant ist .

5 . <u>Satz</u> .

<u>Der Raum</u> X <u>sei von endlicher topologischer</u> A-<u>Dimension, der Komplex</u> $F^\cdot \in D(X_a)$ <u>sei Koberechenbar. Besitzt der Punkt</u> $x \in X$ <u>eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist der kanonische Morphismus</u>

$$\underline{H}^q_{\{x\}}(X, F^\cdot) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x} \underline{H}^q_c(\mathcal{U}, F^\cdot)$$

<u>ein Isomorphismus</u> .

<u>Beweis</u> .

Wir führen erst den Beweis für eine Garbe F durch. Es ist klar, dass der Morphismus

$$H^0_{\{x\}}(X, F) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x} H^0_c(\mathcal{U}, F)$$

ein Isomorphismus ist.

Zum Beweis für $q \neq 0$ behaupten wir dass eine konvergente Spektralfolge

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x}{}^{(p)} H^q_c(\mathcal{U}, F)$$

existiert. Hier zu ist nachzuprüfen, dass für eine injektive Garbe F gilt :

$$\varprojlim_{\mathcal{U} \ni x}{}^{(p)} H^0_c(\mathcal{U}, F) = 0 \quad \text{für} \quad p \neq 0 \quad .$$

Der Raum X ist lokalkompakt, daher gibt es zu jedem Punkt x eine Umgebung $\mathcal{U}$, die in einer Kompakten Menge K enthalten ist, und eine exakte Folge durch $\mathcal{U}$ indizierter projektiver Systeme.

$$(1) \qquad 0 \to H^0_c(\mathcal{U},F) \to H^0(K,F) \to H^0(K-\mathcal{U},F) \to 0$$

Die zugehörige lange exakte Folge derivierter Funktoren ist :

$$(2) \quad 0 \to \varprojlim_{\mathcal{U}} H^0_c(\mathcal{U},F) \to \varprojlim_{\mathcal{U}} H^0(K,F) \to \varprojlim_{\mathcal{U}} H^0(K-\mathcal{U},F) \to \varprojlim_{\mathcal{U}}{}^{(1)} H^0_c(\mathcal{U},F) \to \dots$$

Nach Vortrag 6 ist $\varprojlim_{\mathcal{U}}{}^{(p)} H^0(K,F)$ gleich null für $p \geq 1$. Ausserdem haben wir einen Isomorphismus

$$(3) \qquad H^0(K-\{x\},F) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_{\mathcal{U}} H^0(K-\mathcal{U},F) \quad ,$$

wie leicht zu zeigen ist.

Die Garbe F ist injektiv, also ist die Abbildung

$$H^0(K,F) \longrightarrow H^0(K-\{x\},F)$$

epimorph. Somit folgt aus (2) :

$$\varprojlim_{\mathcal{U}\ni x}{}^{(1)} H^0_c(\mathcal{U},F) = 0 \quad .$$

Das projektive System

$$\mathcal{U} \longmapsto H^0_c(\mathcal{U},F)$$

ist wesentlich abzählbar, dann gilt nach einem Ergebniss von I.E. Roos [1]

$$\varprojlim_{\mathcal{U}\ni x}{}^{(p)} H^0_c(\mathcal{U},F) = 0 \quad \text{für} \quad p \geq 2$$

Somit existiert die Spektralfolge

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{\mathcal{U}\ni x}{}^{(p)}(\mathcal{U},F) \Rightarrow H^{p+q}_{\{x\}}(X,F)$$

Für $p \neq 0,1$ sind alle Glieder gleich null, darum sind $E_2^{p,q}$ und $E_\infty^{p,q}$ gleich, und die Folge :

$$0 \to \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x}{}^{1} H_c^{p-1}(\mathcal{U},F) \to H^p_{\{x\}}(X,F) \to \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x} H_c^p(\mathcal{U},F) \to 0$$

ist exakt.

Das System

$$\mathcal{U} \longmapsto H_c^p(\mathcal{U},F) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

ist wesentlich konstant, und somit $\varprojlim$ - azyklich, also ist

$$\varprojlim_{\mathcal{U} \ni x}{}^{1} H_c^{p-1}(\mathcal{U},F) = 0$$

wodurch wir den gewünschten Isomorphismus erhalten.

Wir betrachten nun wieder den Komplex $F^{\cdot} \in D(X_A)$. Das projektive System

$$\mathcal{U} \longmapsto H^q_{\{x\}}(\mathcal{U},F)$$

ist konstant und isomorph zu $H^q_{\{x\}}(X,F)$ (vgl. exposé 1, prop. 4.7.). Das projektive System

$$K \longmapsto H^q_{\{x\}}(K,F) \qquad (K \text{ kompakte Umgebung von } x)$$

ist ebenfalls konstant und auch isomorph zu $H^q_{\{x\}}(X,F)$. (X ist lokalcompakt). Also ist

$$\varprojlim_{K \ni x} H^q_{\{x\}}(K,F) = H^q_{\{x\}}(X,F) .$$

Die exakte Folge

$$\ldots \to H^{q-1}(K,F) \to H^{q-1}(K-\{x\},F) \to H^q_{\{x\}}(K,F) \to H^q(K,F) \to \ldots$$

und die endliche topologische A-Dimension von X ergeben

$$H^{q-1}(K-\{x\},F) \xrightarrow{\sim} H^q_{\{x\}}(K,F)$$

für q genügend gross, also

$$(4) \qquad H^q_{\{x\}}(X,F) \simeq \varprojlim_{K \ni x} H^{q-1}(K-\{x\},F) .$$

Weil $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, ist $K-\{x\}$ parakompakt, und somit für q genügend gross

$$H^{q-1}(K-\{x\},F) = 0 ,$$

denn dann bildet das System aller abgeschlossenen Mengen eine parakompaktifizierende Familie. Hieraus folgt zusammen mit (4) dass $H^q_{\{x\}}(X,F)$ von endlicher Kohomologischer Dimension ist. Wegen der endlichen topologischen A-Dimension von X gibt es zu jede Garbe F eine gleichmässig beschränkte Auflösung $L^\bullet F$, die $H^0_{\{x\}}(X,?)$ - azyklisch und c-weich ist. Wir bezeichnen mit H_I die Kohomologie "in Richtung der Auflösung" und mit H_{II} die Kohomologie des Doppelkomplexes $\Gamma_{\{x\}}(X,L^\bullet F^\bullet)$ "in Richtung $F^\bullet$". Nach dem, was oben, für eine Garbe F, bewiesen wurde ist der kanonische Morphismus

$$(5) \qquad H_I\,\Gamma_{\{x\}}(X,F) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{U}\ni x} H_I\,\Gamma_c(\mathcal{U},F^\bullet)$$

ein Isomorphismus. Der Funktor $\varprojlim$ ist azyklisch und somit mit der Kohomologie vertauschbar. Wenn wir also H_{II} auf (5) anwenden, bekommen wir einen Isomorphismus, der die E_2-Terme zweier Spektralfolgen verbindet und somit nach dem Approximationssatz (vgl. Godement [2], Satz I, 4.3.1) einen Isomorphismus der Kohomologie der Doppeltkomplexe liefert. Daraus folgt unsere Behauptung.

6. <u>Satz</u>.

<u>Sei</u> $F^\bullet \in D^b(X_A)$ <u>ein Koberechenbarer Komplex, und sei</u> $x \in X$ <u>ein Punkt mit einer abzählbaren Umgebungsbasis. Dann ist das Pro-Objekt</u>

$$\mathcal{U} \longmapsto R\,H_c(\mathcal{U},F^\bullet) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

<u>wesentlich konstant und isomorph zu</u> $R\,H_{\{x\}}(X,F^\bullet)$.

<u>Beweis</u>.

Es ist zu zeigen dass für jedes $L^\bullet \in D(A\text{-Mod})$ gilt:

$$\varinjlim_{\mathcal{U}\ni x} \mathrm{Hom}_{D(A\text{-Mod})}(R\,H_c(\mathcal{U},F^\bullet),L^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_{D(A\text{-Mod})}(R\,H_{\{x\}}(X,F^\bullet),L^\bullet).$$

Die Spektralfolgen

$$'E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(\underline{H}^q_c(\mathcal{U},F^\bullet),L^\bullet) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(R\,H_c(\mathcal{U},F^\bullet),L^\bullet)$$

$$''E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(\underline{H}^q_{\{x\}}(X,F^\bullet),L^\bullet) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(R\,H_{\{x\}}(X,F^\bullet),L^\bullet)$$

liefern dann auf Grund der Koberechenbarkeit, und mit Hilfe von Satz 5 den gewünschten Isomorphismus .

7 . Definition .

Der Komplex $F^\circ \in D(X_A)$ heisst punktweise kohomologisch von endlichem Typ, falls für jedes $x \in X$ und jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Moduln $\underline{H}^q_{\{x\}}(X,F^\circ)$ und $(\mathcal{H}^q F^\circ)_x$ von endlichem Typ sind.

8 . Definition .

Der Komplex $F^\circ \in D^b(X_A)$ heisst Kohomologisch konstruierbar, falls F° berechenbar, koberechenbar und kohomologisch von endlichem Typ ist (vgl. Vortrag 1) und falls der Morphismus

$$\underline{H}^q_{\{x\}}(X,F^\circ) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{U} \ni x} \underline{H}^q_c(\mathcal{U},F^\circ)$$

für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist.

9 . Satz .

Der Raum X sei von endlicher topologischer A-Dimension, F° sei ein Komplex aus $D^b(X_A)$.

Für die folgenden Eigenschaften

(i) F° ist kohomologisch konstruierbar ;
(ii) F° ist punktweise kohomologisch von endlichem Typ und koberechenbar ;
(iii) F° ist punktweise kohomologisch von endlichem Typ und berechenbar ;

gilt dann :

1) (i) $\Rightarrow$ (ii) , (i) $\Rightarrow$ (iii)

2) Besitzt jeder Punkt in X eine abzählbare Umgebungsbasis, so gilt : (ii) $\Rightarrow$ (i) .

3) Ist die Voraussetzung von 2) erfüllt, und ist A ein artinscher Ring, so gilt : (iii) $\Rightarrow$ (i) .

MATHEMATICA SCI. LIBRARY

Beweis .

Zu 1). Es genügt zu zeigen, dass der Komplex $F^\bullet$, falls er kohomologisch konstruierbar ist, auch punktweise kohomologisch von endlichem Typ ist.

Der Komplex $F^\bullet$ ist kohomologisch von endlichem Typ, also ist das projektive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

wesentlich von endlichem Typ. Ausserdem gilt die Isomorphie

$$\varprojlim_{\mathcal{U} \ni x} \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F) \simeq \underline{H}_{\{x\}}^q(X, F) .$$

Somit ist der Modul $\underline{H}_{\{x\}}^q(X, F^\bullet)$ für jedes $x \in X$ und jedes $q \in \mathbb{Z}$ von endlichem Typ .

Es ist noch zu zeigen, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und jedes $x \in X$ der Modul $(\mathcal{H}^q F^\bullet)_x$ von endlichem Typ ist.

Weil $F^\bullet$ kohomologisch von endlichem Typ ist, ist dass induktive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

wesentlich vom endlichem Typ. Also ist der Limes

$$\varinjlim_{\mathcal{U} \ni x} \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet) \cong (\mathcal{H}^q F^\bullet)_x$$

von endlichem Typ.

Zu 2). Das projektive System

$$(1) \qquad \mathcal{U} \longmapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F^\bullet)$$

ist wesentlich konstant, und auf Grund der Voraussetzung, dass $F^\bullet$ punktweise kohomologisch von endlichem Typ ist, ist der projektive Limes von endlichem Typ, also das System (1) wesentlich von endlichem Typ, und somit ist $F^\bullet$ kohomologisch von endlichem Typ.

Wir zeigen, dass der Komplex $F^\bullet$ berechenbar ist, das heisst, dass das induktive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q(\mathcal{U}, F^\bullet) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich konstant ist. Weil F° kohomologisch von endlichem Typ ist, gibt es ein zu $\underline{H}^q(\mathcal{U},F^\circ)$ als Ind-Objekt isomorpher System M_α (vgl. Vortrag 6), da von endlichem Typ ist. Von diesem System zeigen wir, dass es wesentlich konstant ist. Dazu betrachten wir die exakte Folge

$$0 \to \operatorname{Ker} f_\alpha \to M_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} \varinjlim_\alpha M_\alpha \to \operatorname{KoKer} f_\alpha \to 0$$

von der wir wissen, dass M_α und $\varinjlim_\alpha M_\alpha$ von endlichem Typ sind. Also sind auch die Systeme $\operatorname{Ker} f_\alpha$ und $\operatorname{KoKer} f_\alpha$ endlich erzeugt. Da ihre Limites null sind, sind beide Systeme wesentlich null, und somit ist das System M_α wesentlich konstant.

Aus Satz 5 folgt, dass der kanonische Morphismus

$$\underline{H}^q_{\{x\}}(X,F^\circ) \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{U}\ni x} \underline{H}^q_c(\mathcal{U},F^\circ)$$

ein Isomorphismus ist, und somit ist 2) vollständig bewiesen.

Zu 3). Es ist nur zu zeigen dass F° koberechenbar ist denn dann folgt nach 2) die Behauptung. Genauso wie im vorigen Fall aus "koberechenbar" und der Eigenschaft : "punktweise kohomologisch von endlichem Typ" die Eigenschaft : "kohomologisch von endlichem Typ" folgte, folgt in diesem Fall aus "berechenbar" und : "punktweise kohomologisch von endlichem Typ" ebenfalls "kohomologisch von endlichem Typ". Also ist das projektive System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}^q_c(\mathcal{U},F^\circ) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich von endlichem Typ, und wir können ein projektives System endlich erzeugter A-Moduln $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ zu Hilfe nehmen, das als Pro-Objekt isomorph zu $\underline{H}^q_c(\mathcal{U},F^\circ)$ ist. Jedes M_α ist artinsch, also besitzt in M_α das System von Untermoduln $(\operatorname{Im} f_{\beta\alpha})_{\beta>\alpha}$, wobei $(f_{\beta\alpha})_{\beta>\alpha}$ die Übergangsmorphismen sind, einen minimalen Untermodul $(\operatorname{Im} f_{\epsilon\alpha})$. Dann sind für alle $\beta > \epsilon$ die Untermoduln $\operatorname{Im} f_{\beta\alpha}$ und $\operatorname{Im} f_{\epsilon\alpha}$ gleich. Das heisst, dass die Mittag-Leffler Bedingung erfüllt ist. Daher ist der Funktor $\varprojlim_\alpha$ exakt und somit ist die Folge

$$0 \to \varprojlim_{\alpha} \operatorname{Ker} f_\alpha \to \varprojlim_{\alpha} M_\alpha \xrightarrow{\varprojlim f_\alpha} \varprojlim_{\alpha} M_\alpha \to \varprojlim_{\alpha} \operatorname{Koker} f_\alpha \to 0$$

auch exakt. Daraus folgt, dass $\varprojlim_{\alpha} \operatorname{Ker} f_\alpha$ und $\varprojlim_{\alpha} \operatorname{KoKer} f_\alpha$ gleich null sind. Wegen der Mittag-Leffler Bedingung ist das System $\operatorname{Ker} f_\alpha$ (bzw. $\operatorname{KoKer} f_\alpha$) wesentlich surjektiv. Sei N_α ein zu $\operatorname{Ker} f_\alpha$ ($\operatorname{KoKer} f_\alpha$) als Pro-Objekt äquivalentes surjektives System mit abzählbaren Indexmenge. Weil die universellen Morphismen

$$\varprojlim_{\alpha} N_\alpha \to N_\alpha$$

surjektiv sind, die N_α abzählbar sind, (jeder Punkt in X besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis), und $\varprojlim_{\alpha} N_\alpha = 0$ ist, ist das System der (N_α) ein Null-System. Also ist $\operatorname{Ker} f_\alpha$ ($\operatorname{KoKer} f_\alpha$) wesentlich null. Somit ist das System

$$\mathcal{U} \longmapsto \underline{H}_c^q(\mathcal{U}, F^\circ) \qquad (\mathcal{U} \ni x)$$

wesentlich konstant, und der Komplex F° koberechenbar.

LITERATUR

[1] J.E. ROOS.- Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$. Applications. C.R. Acad. Sci. Paris, t. CCLII, 1961, p. 3702-3704 .

[2] R. GODEMENT.- Théorie des faisceaux .

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG
Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966-67
Exposé 9

THEOREME DU NOYAU

La présente rédaction n'a pas fait l'objet d'un exposé oral. Son but est de présenter au lecteur une classe de faisceaux tellement agréables que le rédacteur n'a pu s'empêcher de les appeler parfaits, et de démontrer pour ces faisceaux, de façon simple, des théorèmes énoncés et prouvés dans des cas particuliers lors des exposés oraux .

A désigne un anneau avec élément unité . Les complexes sont désignés par des symboles du type $F^{\bullet}$, $M^{\bullet}$ etc.. le point a parfois disparu de la notation.

0 . Convention .

Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques localement compacts vérifiant la condition $\Delta(A)$ (confer exposé 4) . On désigne par Ω_f une résolution finie du faisceau constant A , par des A-bi-Modules, f-mous à gauche et A-plats à droite. Le complexe Ω_f est appelé une résolution f-fondamentale de A . Lorsque Y est un point, on écrit Ω_X au lieu de Ω_f . Ce complexe joue le même rôle dans l'étude de X , que la résolution de De Rham dans l'étude cohomologique d'une variété différentielle (confer exposé 5) .

1 . Morphisme graphe : préliminaires .

Dans tout ce paragraphe, on conservera les notations et hypothèses suivantes :

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

P est un point et X,Y,Z des espaces localement compacts ; toutes les applications sont continues et vérifient la condition $\Delta(A)$. On suppose que le graphe $\gamma = \binom{f}{g} : Z \to X \times Y$ <u>est propre</u> . Enfin ψ désigne une famille de supports de Y telle que pour tout compact K de X il existe un fermé S de ψ tel que l'on ait $f^{-1}(K) \subset g^{-1}(S)$. Une telle famille ψ est dite <u>adaptée</u> à (f,g) .

On se propose de définir un morphisme bifonctoriel

$$gr_Z^{\psi} : \quad R\mathrm{Hom}(f^*F, g^!G) \longrightarrow R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,F), R\Gamma_{\psi}(Y,G)) \ .$$

1.1. Remarquons que l'on peut toujours choisir les résolutions fondamentales Ω_X et Ω_g telles qu'il existe un morphisme de résolution $m : f^*\Omega_X \to \Omega_g$. En effet, soient $\epsilon_X : A \to \Omega_X$ et $\epsilon_g : A \to \Omega_g$ deux résolutions fondamentales quelconques. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A = A \underset{A}{\otimes} A \arrow[r, "\epsilon_g \otimes \mathrm{id}\, A"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes f^*\epsilon_X"] & \Omega_g \underset{A}{\otimes} A \arrow[d, "\mathrm{id}\,\Omega_g \otimes f^*\epsilon_X"] \\ A \otimes f^*\Omega_X \arrow[r, "\epsilon_g \otimes \mathrm{id}\, f^*\Omega_X"'] & \Omega_g \otimes f^*\Omega_X \end{tikzcd}$$

est commutatif et ses flèches sont des quasi-isomorphismes car Ω_g est A-plat à droite. En particulier

$$A \xrightarrow{\epsilon_g \otimes f^*\epsilon_X} \Omega_g \otimes f^*\Omega_X$$

est une résolution finie de A. Comme les faisceaux du complexe $\Omega_g \otimes f^*\Omega_X$ sont A-plats à droite (car tel est $f^*\Omega_X$) et g-mous à gauche (exposé 4, lemme 3.1.), $\Omega_g \otimes f^*\Omega_X$ est une résolution g-fondamentale de A. On a donc construit une résolution g-fondamentale de A et un morphisme de résolutions, à savoir $\varepsilon_g \otimes \mathrm{id}\, f^*\Omega_X : f^*\Omega_X \to \Omega_g \otimes f^*\Omega_X$.

1.2. Conformément à 1.1. on suppose donné dans ce paragraphe un morphisme de résolutions $m : f^*\Omega_X \to \Omega_g$. En utilisant ce morphisme on va définir, pour tout ouvert U de X et tout complexe G de $K({}_AY)$ un morphisme

$$\theta_m(U) : \mathrm{Hom}^\bullet(g_!((\Omega_g)_{f^{-1}U}),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U,\Omega_X),\Gamma_\psi(Y,G))$$

compatible avec le passage aux ouverts plus petits.

1.2.1. Soient donc U un ouvert de X $\mathcal{F}$ un faisceau de A-bi-Modules sur X, $\mathcal{G}$ un faisceau de A-bi-Modules sur Z.

L'extension par 0 en dehors de U est un morphisme de A- bimodules $\Gamma_c(U,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{F}_U)$. Le foncteur $f^* : {}_AZ_A \to {}_AX_A$ induit un morphisme de bimodules $\Gamma(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(A,\mathcal{F}) \xrightarrow{\text{par } f^*} \mathrm{Hom}(f^*A, f^*\mathcal{F}) = \Gamma(Z, f^*\mathcal{F})$.

Désignons par u le composé des inclusions canoniques $\Gamma_\psi(Y,g_!\mathcal{G}) \to \Gamma(Y,g_!\mathcal{G}) \to \Gamma(Y,g_*\mathcal{G}) = \Gamma(Z,\mathcal{G})$; une section s de $\Gamma(Z,\mathcal{G})$ provient de $\Gamma(Y,g_!\mathcal{G})$ si et seulement si son support Σ est propre sur Y (confer exposé 3) : mais alors si s' désigne la section de $g_!\mathcal{G}$ dont l'image est s, et si Σ' est son support, on a l'égalité $\Sigma' = g(\Sigma)$. Autrement dit, <u>un élément</u> s <u>de</u> $\Gamma(Z,\mathcal{G})$ <u>est dans l'image de</u> u <u>si et seulement si</u>

(i) le support de Σ est propre sur Y

(ii) $g(\Sigma)$ est un élément de ψ.

Avec ces notations, il existe un unique morphisme de A- bimodules α_U, fonctoriel en $\mathcal{F}$ qui rende commutatif le diagramme en traits pleins ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_c(U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha_U"'] & \Gamma(X,\mathcal{F}_U) \arrow[d, "\text{par } f^*"] \\
\Gamma_\psi(Y, g_! f^* \mathcal{F}_U) \arrow[r, "u"] & \Gamma(Z, f^* \mathcal{F}_U)
\end{tikzcd}$$

En effet, si s est une section de $\mathcal{F}$ à support compact $K \subset U$, son image par f^* dans $\Gamma(Z, f^* \mathcal{F}_U)$ a pour support $f^{-1}(K)$. Puisque $\binom{f}{g} : Z \to X \times Y$ est propre, la restriction de g à $f^{-1}(K)$ est propre ; de plus il existe un élément S de ψ tel que $f^{-1}(K)$ soit contenu dans $g^{-1}(S)$: cela implique que $g f^{-1}(K)$ est un fermé contenu dans S, donc un élément de Σ. L'image de s par f^* appartient donc à l'image de u.

1.2.2. Désignons par φ_U le morphisme de complexes de A-bi-Modules

$$g_! f^*(\Omega_X)_U = g_!(f^*\Omega_X)_{f^{-1}U} \xrightarrow{g_! m_{f^{-1}U}} g_!(\Omega_g)_{f^{-1}U} .$$

Alors $\theta_m(U)$ est le morphisme composé

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet(g_!(\Omega_g)_{f^{-1}U}, G^\bullet) \arrow[r, "\mathrm{Hom}^\bullet(\varphi_U, G)"'] & \mathrm{Hom}^\bullet(g_! f^*(\Omega_X)_U, G) \arrow[d, "\text{par } \Gamma_\psi"] \\
\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U,\Omega_X), \Gamma_\psi(Y,G)) & \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_\psi(Y, g_! f^*(\Omega_X)_U), \Gamma_\psi(Y,G)) \arrow[l, "\mathrm{Hom}^\bullet(\alpha_U, \Gamma_\psi(Y,G))"]
\end{tikzcd}$$

1.3. Revenant à la définition explicite des foncteurs "en haut" (confer exposé 4) , on peut interpréter le résultat du paragraphe 1.2. en disant que les $\theta_m(U)$ définissent un morphisme de complexes de faisceaux de ${}_A\underline{X}$

$$\theta_m : f_* g^!_{\Omega_g} G \longrightarrow \pi^!_{X,\Omega_X} \Gamma_\psi(Y,G) \quad .$$

En fait, θ_m induit un morphisme $(G \in \mathcal{O}b D^+({}_A Y))$

$$\theta : R f_* g^! G \longrightarrow \pi^!_X R\Gamma_\psi (Y,G)$$

indépendant de m par passage aux catégories dérivées .

1.3.1. <u>Définition de</u> θ .

Désignons, suivant l'usage, par Q le foncteur canonique de source une catégorie de complexes modulo homotopie et de but la catégorie dérivée associée. Il résulte du chapitre 4 que pour toute application continue $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ qui vérifie la condition $\Delta(A)$ ($\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ localement compacts) et tout complexe φ-fondamental Ω , il existe un isomorphisme fonctoriel $a_\Omega : Q\,\varphi^!_\Omega \to \varphi^! Q$ de foncteurs de $\underline{I}^+({}_A\mathcal{Y})$ dans $D^+({}_A\mathfrak{X})$. Si $i : \Omega \to \Omega'$ est un morphisme de résolutions, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Q\,\varphi^!_\Omega \arrow[dr, "a_\Omega"] & \\
 & \varphi^! Q \\
Q\,\varphi^!_{\Omega'} \arrow[uu, "Q\bar{i}"] \arrow[ur, "a_{\Omega'}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\bar{i} : \varphi^!_{\Omega'} \to \varphi^!_\Omega$ est l'application induite par i est commutatif . Désignons par $\lambda : Q f_* \to R f_* Q$ et $\mu : Q\Gamma_\psi \to R\Gamma_\psi Q$ les morphismes fonctoriels qui entrent dans la définition des foncteurs dérivés $R f_*$ et $R\Gamma_\psi$ (confer [H]).

Désignons par $U : D^+(A)_g \to \underline{I}^+(A)_g$ un foncteur pseudo-inverse de Q (confer [H]), par $\epsilon : \mathrm{id} \to UQ$ le morphisme fonctoriel canonique de source $\underline{\mathrm{comp}}^+(A)_g$ et enfin par $\eta : QU \to \mathrm{id}$ l'isomorphisme fonctoriel qui provient du fait que U est quasi-inverse de Q. Il vient un diagramme en <u>traits pleins</u>

$$
(1)\qquad
\begin{tikzcd}
Qf_* g^!_{\Omega_g} G \arrow[r, "\lambda(g^!_{\Omega_g} G)", "\approx"'] \arrow[d, "Q\theta_m(G)"'] & Rf_* Qg^!_{\Omega_g} G \arrow[r, "Rf_*(a_{\Omega_g}(G))", "\approx"'] & Rf_* g^!(QG) \arrow[d, dashed, "\theta(QG)"] \\
Q\pi^!_{\Omega_X} \Gamma_\psi G \arrow[d, "Q\pi^!_{Q_X} \epsilon(\Gamma_\psi G)"'] & & \pi^!_X R\Gamma_\psi QG \\
Q\pi^!_{\Omega_X} UQ\Gamma_\psi G \arrow[r, "\approx", "a_{\Omega_X}(UQ\Gamma_\psi G)"'] & \pi^!_X QUQ\Gamma_\psi G \arrow[r, "\approx", "\pi^!(\eta(Q\Gamma_\psi G))"'] & \pi^!_X Q\Gamma_\psi G \arrow[u, "\pi^!_X \mu(G)"']
\end{tikzcd}
$$

où G est un objet de $\underline{I}^+({}_AY)$. Il existe alors un unique morphisme fonctoriel $\theta : Rf_* g^! \to \pi^!_X R\Gamma_\psi$ tel que le diagramme complet soit commutatif. En effet $\lambda(g^!_{\Omega_g} G)$ est un isomorphisme puisque $g^!_{\Omega_g} G$ est un complexe de faisceaux **injectifs** en chaque degré. Il existe donc un unique $\bar{\theta} : Rf_* g^! Q \to \pi^!_X R\Gamma_\psi Q$ qui rend le diagramme complet commutatif. Pour conclure, il faut faire appel au fait que $\underline{I}^+({}_AY)$ et $D^+({}_AY)$ sont des catégories équivalentes : ainsi $\bar{\theta} = \theta Q$ et ce θ est unique.

1.3.2. θ <u>est indépendant de</u> m. Donnons nous, dans un premier temps des morphismes

$$u : \Omega_X \longrightarrow \Omega'_X$$

$$v : \Omega_g \longrightarrow \Omega'_g$$

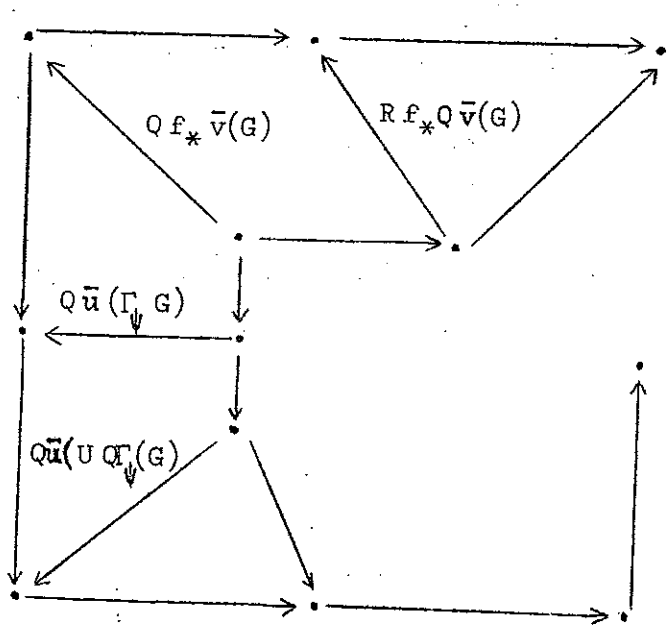
de résolutions fondamentales et supposons que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*\Omega_X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f^*u"] & \Omega_g \arrow[d, "v"] \\ f^*\Omega'_X \arrow[r, "m'"'] & \Omega'_g \end{tikzcd}$$

de résolutions. Ce diagramme induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f_*g^!_{\Omega_g} \arrow[r, "\theta_m"] & \pi^!_{\Omega_X}\Gamma_\psi \\ f_*g^!_{\Omega'_g} \arrow[u, "\bar{v}"] \arrow[r, "\theta_{m'}"] & \pi^!_{\Omega'_X}\Gamma_\psi \arrow[u, "\bar{u}"'] \end{tikzcd}$$

où $\bar{v}$ et $\bar{u}$ sont les morphismes fonctoriels induits par u et v .
Le fait que θ_m et $\theta_{m'}$ induisent le même morphisme θ vient de ce que, compte tenu des propriétés des morphismes a_Ω (confer 1.3.1.), le diagramme suivant est commutatif



où les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[d] & & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[uu] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\ \bullet \arrow[d] & & \\ \bullet \arrow[dr] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

sont respectivement le diagramme (1) et le diagramme (1) où l'on remplace Ω_g par $\Omega_{g'}$ et Ω_X par Ω'_X .

Donnons nous maintenant deux morphismes de résolutions

$$f^*\Omega_X \xrightarrow{m} \Omega_g$$

$$f^*\Omega'_X \xrightarrow{m'} \Omega'_g$$

On se ramène au cas précédent grâce au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*\Omega_X \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "f^*(1\otimes\epsilon'_X)"] & \Omega_g \arrow[d, "1\otimes\epsilon'_g"] \\ f^*(\Omega_X\otimes\Omega'_X) = f^*\Omega_X\otimes f^*\Omega'_X \arrow[r, "m\otimes m'"'] & \Omega_g\otimes\Omega'_g \\ f^*\Omega'_X \arrow[r, "m'"] \arrow[u, "f^*(\epsilon_X\otimes 1)"] & \Omega_g \arrow[u, "\epsilon_g\otimes 1"'] \end{tikzcd} ,$$

et grâce au fait que les morphismes

$$A \xrightarrow{\epsilon_X\otimes\epsilon'_X} \Omega_X\otimes\Omega'_X$$

$$A \xrightarrow{\epsilon_g\otimes\epsilon'_g} \Omega_g\otimes\Omega'_g$$

sont des quasi isomorphismes qui font de $\Omega_X \otimes \Omega'_X$ et $\Omega_g \otimes \Omega'_g$ des résolutions fondamentales (confer exposé 4, lemme 3.1.) .

1.4. <u>Définition de</u> gr_Z^{ψ} .

Nommons gr_Z^{ψ} le morphisme composé

$$\begin{tikzcd}
RHom^{\bullet}(f^*F^{\bullet}, g^! G^{\bullet}) \arrow[r, "\sim", "①"'] & RHom(F^{\bullet}, R f_* g^! G^{\bullet}) \arrow[d, "RHom(F^{\bullet},\theta(G^{\bullet}))"] \\
RHom(R\Gamma_c(X,F^{\bullet}), R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) & RHom(F^{\bullet}, \pi_X^! R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) \arrow[l, "\sim"', "②"]
\end{tikzcd}$$

$$F^{\bullet} \in Ob\ D({}_AX) \quad , \quad G^{\bullet} \in Ob\ D^+({}_AY)$$

où ① est l'isomorphisme provenant de l'adjonction de f^* à f_* (confer exposé 4bis) et ② la dualité de Poincaré (exposé 4) puisque $\pi_{X!}$ n'est autre que $\Gamma_c(X, \quad)$ (confer exposé 3) .

1.4.1. Au niveau des complexes, gr_Z^{ψ} s'explicite comme suit : on se donne un morphisme $m : f^*\Omega_X \to \Omega_g$ (confer 1.1.) , un complexe $F^{\bullet}$ de faisceaux sur X de A-Modules à gauche, et un complexe $G^{\bullet}$ dans $I^+({}_AY)$. Alors gr_Z^{ψ} est induit par le morphisme de complexes suivant :

$$\begin{tikzcd}
Hom^{\bullet}(f^*F^{\bullet}, g^!_{\Omega_g} G^{\bullet}) \arrow[r, "\text{adjonction}", "\approx", "\text{de } f^* \text{ à } f_*"'] & Hom^{\bullet}(F^{\bullet}, f_* g^!_{\Omega_g} G^{\bullet}) \arrow[d, "Hom^{\bullet}(F^{\bullet},\theta_m)"] \\
Hom^{\bullet}(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^{\bullet}), \Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) & Hom^{\bullet}(F^{\bullet}, \pi^!_{X,\Omega_X} \Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) \arrow[l, "\text{définition}", "\approx", "\text{de } \pi^!_{\Omega_X}"']
\end{tikzcd}$$

1.4.2. Remarque .

Le paragraphe 1.3. a été entièrement consacré à démontrer qu'un morphisme explicitement donné sur les complexes permettait de définir un morphisme dans les catégories dérivées. Dans la suite on se dispensera de réécrire des arguments analogues lorsqu'ils se présenteront .

1.4.3. Notons β_U le composé de α_U avec l'inclusion canonique $\Gamma_\psi \to \Gamma$ (confer 1.2.1.) , et considérons le morphisme composé $\bar{\rho}_m$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F) \arrow[r, "\beta_X"] & \Gamma(Y, g_! f^*(\Omega_X \otimes F)) \arrow[d, "\approx"] \\
\pi_{Y*} g_!(\Omega_g \otimes f^* F) = \Gamma(Y, g_!(\Omega_g \otimes f^* F)) & \Gamma(Y, g_!(f^* \Omega_X \otimes f^* F)) \arrow[l, "\text{par } m"']
\end{tikzcd}$$

Il lui correspond, grâce a l'adjonction de π_Y^* à π_{Y*} un morphisme $\rho_m : \pi_Y^* \Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\cdot) \to g_!(\Omega_g \otimes f^* F^\cdot)$. Comme $\Omega_X \otimes F$ est une résolution c-molle de F et que $\Omega_g \otimes f^* F$ est une résolution g-molle de $f^* F$, il résulte de 1.4.2. que ρ_m permet de définir un morphisme ρ , indépendant de m au niveau des catégories dérivées :

$$\rho : \pi_Y^* R\Gamma_c(X,F^\cdot) \longrightarrow R\, g_!\, f^* F \ .$$

1.4.4. Proposition .

Le diagramme $(F^\cdot \in \mathrm{Ob}\, D({}_A X)\ ,\ G^\cdot \in \mathrm{Ob}\, D^+({}_A Y))$

$$\begin{tikzcd}
RHom^{\bullet}(f^*F^{\bullet}, g^! G^{\bullet}) \arrow[r, "\text{Poincaré}"] \arrow[dd, "gr_Z^{\psi}"] & RHom^{\bullet}(R\,g_!\, f^*F^{\bullet}, G^{\bullet}) \arrow[d, "R\,Hom^{\bullet}(\rho, G^{\bullet})"] \\
 & RHom^{\bullet}(\pi_Y^* R\Gamma_c(X, F^{\bullet}), G^{\bullet}) \arrow[d, "\text{adjonction de } \pi^* \text{ à } \pi_*"] \\
RHom^{\bullet}(R\Gamma_c(X,F^{\bullet}), R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) \arrow[r, "\text{canonique}"'] & RHom(R\,\Gamma_c(X,F^{\bullet}), R\Gamma(Y,G^{\bullet}))
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u> .

<u>Démonstration</u> : réinterprétons le diagramme ci-dessus en termes de complexes. Compte tenu de la définition de gr_Z^{ψ} donnée en 1.4.1. il faut démontrer la commutativité du diagramme suivant en <u>trait plein</u>, où θ'_m désigne le composé de θ_m et du morphisme canonique

$$\pi^!_{X,\Omega_X}\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet}) \longrightarrow \pi^!_{X,\Omega_X}\Gamma(Y,G^{\bullet})$$

induit par l'inclusion de Γ_{ψ} dans Γ :

$$\begin{tikzcd}
Hom^{\bullet}(f^*F^{\bullet}, g^!_{\Omega_g} G^{\bullet}) \arrow[rr, "\text{adjonction de } f^* \text{ à } f_*"] \arrow[d, "\delta^{\bullet}(f^*F, G^{\bullet})"] & & Hom^{\bullet}(F^{\bullet}, f_* g^!_{\Omega_g} G^{\bullet}) \arrow[d, "Hom^{\bullet}(F^{\bullet}, \theta'_m)"'] \\
Hom^{\bullet}(g_!(\Omega_g \otimes f^*F^{\bullet}), G^{\bullet}) \arrow[r, dashed, "\text{par } \Gamma(Y,?)"] \arrow[d, "Hom^{\bullet}(\rho_m, G^{\bullet})"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & Hom^{\bullet}(\Gamma(Y, g_!(\Omega_g \otimes f^*F^{\bullet}), \Gamma(Y,G^{\bullet})) \arrow[dr, dashed, "Hom^{\bullet}(\bar{\rho}_m, \Gamma(Y,G^{\bullet}))"] & Hom^{\bullet}(F^{\bullet}, \pi^!_{X,\Omega_X}\Gamma(Y,G^{\bullet}) \arrow[d, "\delta^{\bullet}(F^{\bullet}, \Gamma(Y,G^{\bullet}))"] \\
Hom^{\bullet}(\pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^{\bullet}), G^{\bullet}) \arrow[rr, "\text{adjonction de } \pi_Y^* \text{ à } \pi_{*Y} = \Gamma(Y,?)"'] & & Hom^{\bullet}(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^{\bullet}), \Gamma(Y, G^{\bullet})
\end{tikzcd}$$

où δ a été défini dans l'exposé 4 . Les propriétés des foncteurs adjoints font que le carré du bas à gauche, noté ① , est commutatif. On peut donc remplacer les côtés pleins par les côtés pointillés. Il est clair qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où $F^{\bullet}$ est un faisceau. Comme les deux foncteurs où G est fixe

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}^{\bullet}(f^*F, g^!_{\Omega_g} G^{\bullet})$$

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}^{\bullet}(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^{\bullet}), \Gamma(Y, G))$$

transforment limites inductives en limites projectives, il suffit de faire la démonstration dans le cas ou $F = A_U$, U ouvert de X .

D'une manière générale soit $\mathfrak{X}$ un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\mathfrak{X}$. Notons $\gamma = \gamma(U, \mathcal{F})$ l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(A_U, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}(U)$ qui a un morphisme $m : A_U \to \mathcal{F}$ associe la section $x \mapsto m(1_x)$ où 1_x est la valeur en $x \in U$ de la section unité de A_U . Si $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ est une application continue, <u>alors on convient de choisir l'isomorphisme d'adjonction de</u> f^* <u>à</u> f_* <u>de telle façon que le diagramme où</u> $\mathcal{G}$ <u>est un faisceau sur</u> $\mathcal{Y}$ <u>et</u> U <u>un ouvert de</u> $\mathcal{Y}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A_{f^{-1}U}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(f^*A_U, \mathcal{G}) \arrow[r, "\text{adjonction}"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Hom}(A_U, f_*\mathcal{G}) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{G}(f^{-1}U) \arrow[r, "="] & f_*\mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

<u>soit commutatif</u> .

Avec les mêmes notations, on a défini $f^!_{\Omega_f}$ de telle façon (confer exposé 4, 1.0.) que le diagramme où V est un ouvert de $\mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A_V, f^!_{\Omega_f}\mathcal{Y}) \arrow[rr, "\delta(A_V,\mathcal{Y})"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathrm{Hom}(f_!(\Omega_f \otimes A_V), \mathcal{Y}) \\
& f^!_{\Omega_f}\mathcal{Y}(V) \arrow[ur, "="'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif .

Il résulte des remarques précédentes que notre problème consiste à montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(f^{-1}U, g^!_{\Omega_g} G^\bullet) \arrow[r, "="] \arrow[d, "="] & \Gamma(U, f_* g^!_{\Omega_g} G^\bullet) \arrow[d, "\theta'_m(U)"] \\
\mathrm{Hom}(g_!(\Omega_g)_{f^{-1}U}, G^\bullet) \arrow[d, dashed, "\text{par } \Gamma"] & \Gamma(U, \pi^!_{X,\Omega_X}\Gamma(Y,G)) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(Y, g_!(\Omega_g)_{f^{-1}U}), \Gamma(Y,G)) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Hom}(\bar{\rho}_m, \Gamma(Y,G))"'] & \mathrm{Hom}\,\Gamma_c(X, (\Omega_X)_U, \Gamma(Y,G))
\end{tikzcd}$$

est commutatif : et ceci est une conséquence immédiate des définitions de θ_m et $\bar{\rho}_m$ (confer 1.2.2. et 1.4.3.) .

1.5. Considérons, à titre d'exemple, le cas où Z est le produit $X \times Y$ où $g = pr_Y$, $f = pr_X$, et où ψ est la famille de tous les fermés de Y . Dans ce cas, $f^*\Omega_X$ est non seulement un complexe de faisceaux A-plats à droite, mais encore g-mous à gauche. En effet, si $\mathcal{F}$ est π_X-mou, on a $H^q_c(X \times \{y\}, f^*\mathcal{F}) = H^q_c(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$, ce qui signifie très exactement que $\mathcal{F}$ est g-mou (confer exposé 3, 3.2.) . On peut donc choisir $\Omega_g = f^*\Omega_X$ et m l'identité. Il suffit alors de relire les pages 5 et 6 de l'exposé 3 pour constater que le morphisme ρ n'est autre que l'<u>isomorphisme</u>

$$\pi_Y^* \, R\,\pi_{X!} \longrightarrow R\,pr_{Y!}\, pr_X^*$$

de l'exposé 3 , correspondant au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\
X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\
 & pt &
\end{tikzcd}$$

La proposition 1.4.4. et la définition de $gr_Z^{\Downarrow}$ montre que dans ce cas particulier, θ est l'isomorphisme

$$R\,pr_{X*}\, pr_Y^! \longrightarrow \pi_X^!\, R\,\pi_{Y*}$$

correspondant au même diagramme cartésien, et défini dans l'exposé 4bis .

1.5.1. Nous aurons besoin (3.3.1.) d'un résultat un peu plus précis que le précédent. Au niveau des complexes, ρ est un morphisme

$$\pi_Y^*\, \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F) \longrightarrow pr_{Y!}\, pr_X^*(\Omega_X \otimes F) .$$

En fait puisque l'on a pris $\Omega_g = f^*\Omega_X$ et $m = 1$, l'adjoint $\bar{\rho}$ de ρ n'est autre que le morphisme β_X de 1.4.3. et est donc défini pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de ${}_A X$ (et non plus seulement pour les complexes de la forme $\Omega \otimes \mathcal{F}$) . On a alors le résultat suivant

<u>Proposition</u> .

<u>Le morphisme fonctoriel</u>

$$\rho : \pi_Y^*\, \Gamma_c(X, ?) \longrightarrow pr_{Y!}\, pr_X^*(?)$$

<u>est un isomorphisme</u> .

Démonstration : On va montrer que, pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de ${}_AX$ et tout point y de Y, le morphisme ρ_y induit par ρ au niveau des fibres au-dessus du point y est un isomorphisme. Comme la fibre de $\pi_Y^* \Gamma_c(X, \mathcal{F})$ n'est autre que $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$, on voit facilement que ρ_y n'est autre que le morphisme composé

$$\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\rho}} \Gamma(Y, pr_{Y!}\, pr_X^* \mathcal{F}) \xrightarrow{r_y} (pr_{Y!}\, pr_X^* \mathcal{F})_y$$

où r_y fait correspondre à une section sa valeur en y. Mais alors, soit $i_y : (pr_{Y!}\, pr_X^* \mathcal{F})_y \to \Gamma_c(X \times y, pr_X^* \mathcal{F})$ l'isomorphisme canonique défini dans l'exposé 3 proposition 1.2. . Le composé

$$\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho_y} (pr_{Y!}\, pr_X^* \mathcal{F})_y \xrightarrow{i_y} \Gamma_c(X \times y, pr_X^* \mathcal{F}) \downarrow \Gamma_c(X, \mathcal{F})$$

n'est autre que l'identité : ρ_y est bien un isomorphisme .

1.6. Interprétation de $H^o(gr_Z^\psi)$. Reprenons les notations générales de 1.4., et rappelons que nous avons défini dans 1.2.1. le morphisme

$$\alpha(=\alpha_X) : \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_\psi(Y, g_! f^* \mathcal{F})$$

ce morphisme fonctoriel passe aux catégories dérivées et définit un morphisme encore appelé $\alpha : R\Gamma_c(X, F^\bullet) \to R\Gamma_\psi(Y, R g_! f^* F^\bullet)$ pour $F^\bullet \in \mathrm{Ob}\, D^+({}_AX)$. (La démonstration se trouve en 1.4.2.) . (Sans hypothèses supplémentaires, le foncteur $R\Gamma_\psi$ n'est défini que sur $D^+({}_AY)$!!) .

Supposons donc que $F^\bullet$ soit un objet de $D^+({}_A\underline{X})$ et $G^\bullet$ un objet de $D^+({}_A\underline{Y})$. Donnons nous un élément i de $H^o \mathrm{Hom}^\bullet(f^*F^\bullet, g^! G^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^+({}_AX)}(f^*F^\bullet, g^! G^\bullet)$. Il lui correspond par $H^o(gr_Z^\psi)$ un élément de $H^o \mathrm{Hom}^\bullet(R\Gamma_c(X, F^\bullet), R\Gamma_\psi(Y, G^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{D^+(A)_g}(R\Gamma_c(X, F^\bullet), R\Gamma_\psi(Y, G^\bullet))$ qui se définit simplement de la manière suivante : c'est le morphisme composé :

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} R\Gamma_c(X,F^\bullet) \arrow[r, "\alpha"] & R\Gamma_\psi(Y,R g_! f^*F^\bullet) \arrow[r, "R\Gamma_\psi(Y,R g_! i)"] & R\Gamma_\psi(Y,R g_! g^! G^\bullet) \arrow[d] \\ & & R\Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \end{tikzcd}$$

où la dernière flèche est induite par le morphisme d'adjonction $Rg_! g^! G^\bullet \to G^\bullet$ défini dans l'exposé 4 .

Pour le démontrer, on prend $G^\bullet$ dans $I^+({}_AY)$, on représente i par un morphisme de $\mathrm{Hom}^\circ(f^*F^\bullet, g^!_{\Omega_g} G^\bullet)$ ce qui est possible puisque $g^!_{\Omega_g} G^\bullet$ est un complexe de faisceauxinjectifs en chaque degré, et on considère la suite de morphismes

$$\begin{tikzcd} \Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\bullet) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed] & \Gamma_\psi(Y,g_!(f^*\Omega_X \otimes f^*F^\bullet)) \arrow[d, "\Gamma_\psi(Y,g_!(m \otimes f^*F^\bullet))"] \\ & \Gamma_\psi(Y,g_!(\Omega_g \otimes f^*F^\bullet)) \arrow[d, "\Gamma_\psi(Y,g_!(\Omega_g \otimes i))"] \\ \Gamma_\psi(Y,G^\bullet) & \Gamma_\psi(Y,g_!^{\Omega_g} g^!_{\Omega_g} G^\bullet) = \Gamma_\psi(Y,g_!(\Omega_g \otimes g^!_{\Omega_g} F^\bullet)) \arrow[l, "\text{morphisme d'adjonction de } g^!_{\Omega_g} \text{ à } g_!^{\Omega_g}"'] \end{tikzcd}$$

On laisse en exercice au lecteur la vérification du fait que ce morphisme composé est $H^\circ(gr_Z^\psi)(i)$. La considération de la flèche en pointillé permet de montrer sans utiliser 1.4.2. que α passe aux catégories dérivées.

1.7. Comme second exemple considérons le cas où X est un ouvert de Y, $Z = X$, $f = \mathrm{id}$, $g : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion et supposons que ψ contienne les compacts de X . Alors (confer exposé 4bis) on a $g^! = g^*$. Soit $G^\bullet$ un

objet de $D^+({}_AY)$. On a un morphisme

$$H^o(gr^{\psi}) : \mathrm{Hom}_{D({}_AX)}(g^*G^{\cdot}, g^!G^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(A)_g}(R\Gamma_c(X,G^{\cdot}), R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\cdot}))$$

<u>Je dis que l'image par</u> $H^o(gr_X^{\psi})$ <u>de l'application identique</u> $g^*G^{\cdot} \to g^!G^{\cdot} = g^*G^{\cdot}$ <u>n'est autre que l'application canonique</u> $R\Gamma_c(X,G^{\cdot}) \to R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\cdot})$ <u>induite par l'inclusion</u> $X \hookrightarrow Y$.

Prenons en effet $G^{\cdot}$ dans $I^+({}_AY)$. Le diagramme (1) de 1.6. s'écrit (puisque $g^*G^{\cdot}$ est dans $I^+({}_AX)$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_c(X, g^*G^{\cdot}) \arrow[r, "\alpha"] & \Gamma_{\psi}(Y, G_X^{\cdot}) \arrow[r, "id"] & \Gamma_{\psi}(Y, G_X^{\cdot}) \arrow[d] \\
 & & \Gamma_{\psi}(Y, G^{\cdot})
\end{tikzcd}$$

où la dernière flèche résulte de l'inclusion $G_X^{\cdot} \to G^{\cdot}$. Il suffit maintenant de revenir à la définition de α pour conclure .

2 . <u>Morphisme graphe</u> .

Dans ce paragraphe, on utilisera les notations suivantes : X et Y sont deux espaces localement compacts ; Z désigne un sous-ensemble fermé de $X \times Y$, $i_Z : Z \to X \times Y$ est l'inclusion ; enfin f_Z (resp. g_Z) est l'application $pr_X \circ i$ (resp. $pr_Y \circ i$) de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, hook, "i_Z"] \arrow[dl, "f_Z"'] \arrow[dr, "g_Z"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "pr_X"] \arrow[dr, "pr_Y"'] & \\
X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\
 & pt &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On suppose que π_X et π_Y vérifient la condition $\Delta(A)$, de sorte que toutes les applications du diagramme ci-dessus la vérifient (confer 1.5. et exposé 4, proposition 2.4.). On se donne sur Y une famille ψ de supports et on définit Φ_ψ comme étant la famille des fermés Z de $X \times Y$ tels que Z est dans Φ_ψ si et seulement si pour tout compact K de X, il existe un élément S de ψ tel que l'on ait : $pr_X^{-1}K \cap Z \subset pr_Y^{-1}S$. Autrement dit, Z est dans Φ_ψ si et seulement si (f_Z, g_Z) est une paire adaptée à ψ (confer 1).

Donnons quelques exemples

2.0.1. Si ψ est la famille des compacts de Y, Φ_ψ est la famille des fermés de $X \times Y$ propres sur X. Si ψ est la famille des fermés de Y, Φ_ψ est la famille de tous les fermés de $X \times Y$.

2.0.2. Soit X un ouvert de Y. L'image dans $X \times Y$ du graphe de l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ est un élément de Φ_ψ si les compacts de X sont des éléments de ψ.

2.0.3. Dans la situation du paragraphe 1,

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

la famille ψ de fermés de Y est adaptée à (f,g) si et seulement si l'image de Z dans $X \times Y$ du graphe $\gamma = \binom{f}{g}$ est un élément de Φ_ψ et si γ est propre.

2.1. On se propose maintenant de définir un morphisme fonctoriel

$$gr^{\psi} : R\Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, R\mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr_Y^! G^{\bullet})) \to RHom^{\bullet}(R\Gamma_c(X,F^{\bullet}), R\Gamma_\psi(Y,G^{\bullet}))$$

pour $F^{\bullet} \in Ob\, D^-({}_A X)$ et $G^{\bullet} \in Ob\, D^+({}_A Y)$.

2.1.1. Soit Ω_X une résolution fondamentale, et posons $\Omega_{g_Z} = f_Z^* \Omega_X$. D'après 1.5. (et le fait que $i_{Z!}$ est un foncteur exact), Ω_{g_Z} est une résolution g_Z-fondamentale du faisceau constant A . On prend donc pour $m : f_Z^* \Omega_X \to \Omega_{g_Z}$ l'identité .

2.1.2. Remarquons que si $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est une inclusion fermée, et si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux sur $\mathfrak{X}$, alors on a

$$\Gamma_F(\mathfrak{X}, \mathcal{H}om_A(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = Ker_A(Hom_A(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow Hom_A(\mathcal{F}|\mathfrak{X}-Z, \mathcal{G}|\mathfrak{X}-Z))$$

$$= Hom_A(i_! i^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) = Hom_A(i^* \mathcal{F}, i^! \mathcal{G})$$

on l'on a posé $i^! = i^!_{\Omega_i}$, Ω_i étant la i-résolution fondamentale de A égale à A lui-même .

2.1.3. Ces remarques étant faites, revenons à la définition de gr^{ψ} . Donnons nous des complexes $G^{\bullet}$ dans $I^+({}_A Y)$ et $F^{\bullet}$ dans $K^-({}_A X)$. Il vient, d'après 2.1.1. et 2.1.2.

$$\Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, \mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^{\bullet}) =$$

$$\varinjlim_{Z \in \Phi_\psi} \Gamma_Z(X \times Y, \mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^{\bullet}) =$$

$$\varinjlim_{Z \in \Phi_\psi} Hom(i_Z^* pr_X^* F^{\bullet}, i^! pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^{\bullet}) =$$

$$\varinjlim_{Z \in \Phi_\psi} Hom(f_Z^* F^{\bullet}, g^!_{Z, \Omega_{g_Z}} G^{\bullet}) .$$

Soit maintenant $Z' \overset{j}{\hookrightarrow} Z$ l'inclusion d'un élément Z' de Φ_ψ dans Z. Le système inductif suivant lequel nous calculons la limite inductive, et désigne pour simplifier l'écriture par $\mathrm{Hom}(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z,\Omega_{g_Z}} G^\bullet)$ associe à j l'application Λ-linéaire ω_j, composé des applications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(f_{Z'}^* F^\bullet, g^!_{Z',\Omega_{g_{Z'}}} G^\bullet) = \mathrm{Hom}(j^* f_Z^* F^\bullet, j^! g^!_{Z,\Omega_{g_Z}} G^\bullet) \arrow[d, "\text{adjonction de } j_* \text{ à } j^!"] \\
\mathrm{Hom}(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z,\Omega_{g_Z}} G^\bullet) \arrow[r, leftarrow, "\text{par}", "\mathrm{id} \to j_* j^*"'] & \mathrm{Hom}(j_* j^* f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z,\Omega_{g_Z}} G^\bullet) .
\end{tikzcd}$$

ω_j

Pour définir un morphisme de $\Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, \mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^!, pr_X^* \Omega_X G^\bullet)$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_c(X,F'), \Gamma_\psi(Y,G'))$, il suffit de se donner pour tout Z des morphismes Λ-linéaires gr_Z^ψ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet(f_{Z'}^* F^\bullet, g^!_{Z',\Omega_{g_{Z'}}} G^\bullet) \arrow[r, "gr_{Z'}^\psi"] \arrow[d, "\omega_j"'] & \mathrm{Hom}(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F'), \Gamma_\psi(Y,G')) \\
\mathrm{Hom}^\bullet(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z,\Omega_{g_Z}} G^\bullet) \arrow[ur, "gr_Z^\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $j : Z' \hookrightarrow Z$. Mais nous disposons d'une telle famille de gr_Z^ψ à savoir les morphismes tout spécialement désigné par ce symbole dans le paragraphe 1.4.1. . La vérification de la commutativité de (1) est un simple exercice sur les foncteurs adjoints.

2.1.4. Posons

$$U(F^\bullet, G^\bullet) = \Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, \mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^\bullet)$$

$$V(F^\bullet, G^\bullet) = \mathrm{Hom}(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^\bullet), \Gamma_\psi(Y, G^\bullet))$$

U et V sont des foncteurs de $K^-({}_A X) \times I^+({}_A Y)$ dans $K^+(\Lambda)$.
De plus, il existe un isomorphisme fonctoriel

$$(*) \qquad Q\,U(F^\bullet, G^\bullet) \simeq R\,\Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y,\ R\,\mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet,\ pr_Y^! G^\bullet))$$

et un morphisme fonctoriel

$$(**) \qquad Q\,V(F^\bullet, G^\bullet) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(R\,\Gamma_c(X, F^\bullet), R\,\Gamma_\psi(Y, G^\bullet))$$

Le morphisme gr^ψ passe donc aux catégories dérivées : on obtient le morphisme annoncé en 2.1. (Par abus de notation, on note de la même manière le morphisme au niveau des complexes et celui qui est induit au niveau des catégories dérivées) .

(L'isomorphisme $*$ provient du fait que U transforme quasi-isomorphismes en l'argument $G^\bullet$ i.e. homotopismes en $G^\bullet$ en quasi-isomorphismes et quasi-isomorphisme en l'argument F en quasi-isomorphismes car $G^\bullet$ étant un complexe de faisceaux injectifs, $\mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^\bullet)$ est un complexe de faisceaux flasques, donc Γ_{Φ_ψ} -acycliques) .

2.1.5. Notons in_Z l'application canonique de $\mathrm{Hom}^\bullet(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z, \Omega_{g_Z}} G^\bullet)$ dans la limite inductive. Comme on a $Q\,\mathrm{Hom}^\bullet(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z, \Omega_{g_Z}} G^\bullet) \simeq R\,\mathrm{Hom}^\bullet(f_Z^* F, g^! G^\bullet)$ ce morphisme passe aux catégories dérivées. De la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet(f_Z^* F^\bullet, g^!_{Z, \Omega_{g_Z}} G^\bullet) \arrow[r, "gr_Z^\psi"] \arrow[d, "in_Z"'] & \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^\bullet), \Gamma_\psi(Y, G^\bullet)) \\
\Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y,\ \mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} G^\bullet) \arrow[ur, "gr^\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

il résulte que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
R\,\mathrm{Hom}^{\bullet}(f_Z^* F^{\bullet}, g_Z^! G^{\bullet}) \arrow[r, "gr_Z^{\psi}"] \arrow[d, "in_Z"'] & R\,\mathrm{Hom}^{\bullet}(R\Gamma_c(X,F^{\bullet}), \Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})) \\
R\Gamma_{\Phi_{\psi}}(X \times Y, R\,\mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr_Y^! G^{\bullet}) \arrow[ur, "gr^{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

En particulier, considérons le cas où X est un ouvert de Y et où ψ est une famille de fermés de Y <u>contenant les compacts de</u> X. Dans ces conditions, on sait (confer 1.7.) que le morphisme canonique $R\Gamma_c(X,G^{\bullet}) \to R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})$ est l'image par $H^0(gr_X^{\psi})$ de l'application identique de $g^*G^{\bullet}$. On en déduit la

<u>Proposition</u> .

<u>Soient</u> X <u>un ouvert de</u> Y <u>et</u> ψ <u>une famille de fermés contenant les compacts de</u> X . <u>Pour tout complexe</u> $G^{\bullet}$ <u>de</u> $D^+({}_AY)$, <u>le morphisme canonique</u> $R\Gamma_c(X,G^{\bullet}) \to R\Gamma_{\psi}(Y,G^{\bullet})$ <u>est dans l'image de</u> $H^0(gr^{\psi})$.

3 . <u>Définition du morphisme noyau</u> .

3.0. <u>Convention</u> .

A partir de maintenant, on conviendra que A <u>est une</u> Λ-<u>algèbre</u>, Λ-<u>plate</u> .

Ici encore, X et Y sont localement compacts, π_X , π_Y vérifient la condition $\Delta(A)$, et pr_X et pr_Y désignent les projections de $X \times Y$ sur X et Y . On note aussi Ω_X une résolution fondamentale de X .

3.0.1. Rappelons qu'on a désigné par $DF^\bullet$ (confer exposé 8) le faisceau $R\,\mathcal{H}om(F^\bullet, \pi_X^! A)$, $F^\bullet$ étant un objet de $D({}_AX)$. En général, ce faisceau est un faisceau de A-modules, mais l'hypothèse faite sur A entraine que l'on peut considérer ce faisceau comme un élément de $D(X_A)$ (confer appendice 2.3.) . On se propose de définir un morphisme "noyau" .

$$N : DF^\bullet \overset{L}{\underset{A}{\boxtimes}} G^\bullet \longrightarrow R\,\mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^! G^\bullet)$$

pour $F^\bullet$ dans $D({}_AX)$ et $G^\bullet$ dans $D^b_{apf}({}_AY)$. Le sigle apf , mis pour amplitude plate finie, signifie que l'on ne considère que des complexes quasi-isomorphes à des complexes bornés, plats en chaque degré.

3.1. Soit donc $F^\bullet$ un complexe de $K({}_AX)$, $G^\bullet$ un complexe fini de faisceaux c-mous et plats à gauche de ${}_AY$. On se donne une résolution $\epsilon_G : G^\bullet \to I\,G^\bullet$ de $G^\bullet$ par un complexe de faisceaux injectifs en chaque degré , et une résolution $\epsilon_A : A \to I\,A$ du A-bi-Module A par des A-bi-Modules A-injectifs à gauche (confer appendice) .

Puisque $G^\bullet$ est un complexe de faisceaux plats, le morphisme

$$G^\bullet = \pi_Y^* A \underset{A}{\otimes} G^\bullet \xrightarrow{\pi_Y^* \epsilon_A \otimes \mathrm{id}\, G^\bullet} \pi_Y^* I\,A \underset{A}{\otimes} G^\bullet$$

est un quasi isomorphisme (appendice 1.1.) de A-Modules à gauche. Il existe donc un unique à homotopie près quasi-isomorphisme r tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} G^\bullet \arrow[rr, "\pi_Y^* \epsilon_A \otimes \mathrm{id}\, G^\bullet"] \arrow[dr, "\epsilon_{G^\bullet}"'] & & \pi_Y^* I\,A \underset{A}{\otimes} G^\bullet \arrow[dl, "r"] \\ & I\,G^\bullet & \end{tikzcd}$$

soit commutatif .

Les notations et conventions de 3.1. seront conservées jusqu'à la fin de la rédaction .

3.1.1. D'après sa définition, l'objet $DF^\bullet$ de $D^-(X_A)$ est représenté par le complexe de faisceaux $\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \pi^!_{X,\Omega_X} IA)$. Notons $DF^\bullet(U)$ le complexe des sections au-dessus de l'ouvert U de ce complexe de faisceaux. On a donc

$$DF^\bullet(U) = \mathrm{Hom}_A(F^\bullet_U, \pi^!_{X,\Omega_X} IA) = \mathrm{Hom}_A(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\bullet), IA) .$$

De même, l'objet $R\,\mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^! G^\bullet)$ peut être représenté par le complexe $\mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y,pr_X^*\Omega_X} IG^\bullet)$. Si V est un ouvert de Y, on a

$$\Gamma(U \times V, \mathcal{H}om^\bullet(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y,pr_X^*\Omega_X} IG^\bullet))$$

$$= \mathrm{Hom}_A((pr_X^* F^\bullet)_{U\times V}, pr^!_{Y,pr_X^*\Omega_X} IG^\bullet)$$

$$\approx \mathrm{Hom}_A(pr_{Y!}(pr_X^*\Omega_X \underset{A}{\otimes} (pr_X^* F^\bullet)_{U\times V}), IG^\bullet)$$

$$= \mathrm{Hom}_A(pr_{Y!}(pr_Y^* A_V \underset{A}{\otimes} pr_X^*(\Omega_X \underset{A}{\otimes} F^\bullet_U)), IG^\bullet) .$$

L'exposé 3, lemme 4.4.1. nous fournit un isomorphisme (formule de projection)

$$\pi^o : A_V \otimes pr_{Y!}\, pr_X^*(\Omega_X \otimes F^\bullet_U) \longrightarrow pr_{Y!}(pr_Y^* A_V \otimes pr_X^*(\Omega_X \otimes F_U))$$

puisque A_V est A-plat et que $pr_X^*(\Omega_X \otimes F_U)$ est un complexe de faisceaux pr_Y-mous (confer 1.5.). Par ailleurs, dans 1.5.1. nous avons exhibé un isomorphisme

$$\rho : \pi_Y^* \Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F_U) \longrightarrow pr_{Y!}\, pr_X^*(\Omega_X \otimes F_U) .$$

Notons alors μ le morphisme

$$A_V \otimes \pi_Y^* \Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F_U) \longrightarrow pr_{Y!}(pr_Y^* A_V \otimes pr_X^*(\Omega_X \otimes F_U))$$

défini par l'égalité $\mu = \pi^o \circ (A_V \otimes \rho)$. On écrira aussi $\mu(U,V,F)$ lors-

qu'il sera nécessaire de préciser. Ce morphisme induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(\mu, IG^{\bullet}) : \Gamma(U \times V, \mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} I G^{\bullet})) \to \mathrm{Hom}^{\bullet}_A(A_V \otimes \pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F_U), IG^{\bullet})$$

D'après les propriétés universelles du foncteur $\boxtimes$, se donner un morphisme de Λ-modules $DF^{\bullet} \underset{A}{\boxtimes} G^{\bullet} \to \mathcal{H}om(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_Y I G^{\bullet})$ revient à se donner, pour tout ouvert U de X et tout ouvert V de Y un morphisme de Λ-modules

$$N = N(U,V) : DF^{\bullet}(U) \underset{A}{\otimes} G^{\bullet}(V) \longrightarrow \Gamma(U \times V, \mathcal{H}om^{\bullet}(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} IG^{\bullet})$$

compatible avec les restrictions aux ouverts plus petits. Comme μ est un isomorphisme, il revient au même de se donner des morphismes de Λ-modules

$$\tilde{N} = \tilde{N}(U,V) : DF^{\bullet}(U) \underset{A}{\otimes} G^{\bullet}(V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_V \underset{A}{\otimes} \pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F_U), IG^{\bullet})$$

que l'on se propose de décrire dans les paragraphes suivants .

3.1.2. Dans un premier temps, on cherche à définir un Λ-homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(M,N) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}_A(M',N') \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{Hom}_A(M' \underset{A}{\otimes} M , N \underset{A}{\otimes} N')$ fonctoriel en M et N' (M et N' sont des faisceaux de A-Modules à gauche et N et M' des faisceaux de A-bi-Modules). Il est clair que la donnée d'un tel morphisme fonctoriel entraîne l'existence d'un morphisme de A-modules à gauche

$$\sigma : M' \underset{A}{\otimes} N \longrightarrow N \underset{A}{\otimes} M'$$

(faire $M = N$, $N' = M'$: alors $\sigma = \Sigma(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$) .

Réciproquement supposons donné un A-homomorphisme de faisceaux

$$M' \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{\sigma} N \underset{A}{\otimes} M'$$

et soient $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(M',N')$ deux morphismes A-linéaires ; on définit $\Sigma_\sigma(f \otimes g)$ comme étant le morphisme composé

$$M' \underset{A}{\otimes} M \xrightarrow{id \otimes f} M' \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{\sigma} N \underset{A}{\otimes} M' \xrightarrow{id \otimes g} N \otimes N' .$$

Il est clair que $\Sigma_\sigma(f \otimes g)$ est un A-homomorphisme et que l'application $f \otimes g \mapsto \Sigma_\sigma(f \otimes g)$ est Λ-linéaire.

Proposons nous maintenant de généraliser l'étude précédente au cas des complexes de faisceaux. En fait il nous suffira de considérer le cas où l'on suppose donné un morphisme fonctoriel de A-Modules à gauche

$$\sigma : M' \underset{A}{\otimes} ? \longrightarrow ? \underset{A}{\otimes} M' .$$

Soient alors M et N' deux complexes de faisceaux de A-Modules à gauche, et N un complexe de A-bi-Modules. On désigne par la même lettre M' le complexe de A-bi-Modules concentré en degré 0 et égal à M' en ce degré. On définit une application

$$\Sigma_\sigma : \mathrm{Hom}_A^\circ(M^\circ, N^\circ) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}_A^\circ(M'^\circ, N'^\circ) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^\circ(M'^\circ \underset{A}{\otimes} M^\circ , N^\circ \underset{A}{\otimes} N'^\circ)$$

de la façon suivante :

Soit $f = (f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un élément de $\mathrm{Hom}_A^p(M^\circ, N^\circ) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M^k, N^{p+k})$ de même soit g un élément de $\mathrm{Hom}^q(M' , N'^\circ) = \mathrm{Hom}(M' , N'^q)$. On pose :

$$(\Sigma_\sigma(f \otimes g))^k = (-1)^{kq} (\mathrm{id}\, N^{p+k} \otimes g) \circ \sigma(N_{p+k}) \circ (\mathrm{id}(M') \otimes f^k)$$

et $$\Sigma_\sigma(f \otimes g) = (\Sigma_\sigma(f \otimes g)^k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

c'est un élément de $\mathrm{Hom}^{p+q}(M'^\circ \underset{A}{\otimes} M^\circ , N^\circ \underset{A}{\otimes} N'^\circ)$ et un calcul sans difficulté montre que l'application Σ_σ ainsi définie est un <u>morphisme de complexes sur</u> Λ (i.e. Λ-linéaire, de degré 0 , commutant aux différentielles) ; il est bien évidemment fonctoriel en M° et N'° .

3.1.3. Considérons alors le morphisme fonctoriel

$$\sigma : A_V \underset{A}{\otimes} ? \longrightarrow ? \underset{A}{\otimes} A_V$$

qui se réduit à l'identité sur les fibres. D'après 3.1.2. il lui correspond un morphisme de complexes

$$\begin{array}{c}
DF^{\bullet}(U) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}^{\bullet}(A_V, G^{\bullet}) = \mathrm{Hom}^{\bullet}_A(\Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F), IA) \otimes \mathrm{Hom}(A_V, G^{\bullet}) \\
\Big\downarrow \text{par } \pi_Y^* \\
\mathrm{Hom}^{\bullet}_A(\pi_Y^* \Gamma(X, \Omega_X \otimes F), \pi_Y^* IA) \otimes \mathrm{Hom}(A_V, G^{\bullet}) \\
\Big\downarrow \Sigma_\sigma \\
\mathrm{Hom}^{\bullet}_A(A_V \underset{A}{\otimes} \pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F), \pi_Y^* IA \otimes G^{\bullet})
\end{array}$$

Enfin $\tilde{N}(U,V)$ est le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc}
DF^{\bullet}(U) \underset{A}{\otimes} G^{\bullet}(V) & \xrightarrow[\text{①}]{} & DF^{\bullet}(U) \underset{A}{\otimes} \mathrm{Hom}^{\bullet}(A_V, G^{\bullet}) \\
 & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Hom}^{\bullet}_A(A_V \underset{A}{\otimes} \pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^{\bullet}), IG^{\bullet}) & \xleftarrow[\text{②}]{} & \mathrm{Hom}^{\bullet}_A(A_V \underset{A}{\otimes} \pi_Y^* \Gamma_c(X, \Omega_X \otimes F^{\bullet}), \pi_Y^* IA \otimes G^{\bullet})
\end{array}$$

où ① est donné par l'isomorphisme $G^{\bullet}(V) \xrightarrow{\gamma^{-1}} \mathrm{Hom}^{\bullet}(A_V, G^{\bullet})$ (voir 1.4.4. pour la notation γ) et ② par le morphisme $r : \pi_Y^* IA \otimes G^{\bullet} \to IG^{\bullet}$ de 3.1. .

3.1.4. Nous sommes donc en possession d'un morphisme

$$N : DF^{\bullet} \underset{A}{\boxtimes} G^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{H}om_A(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_{Y, pr_X^* \Omega_X} I^{\bullet} G^{\bullet}) .$$

Comme nous avons eu la précaution de prendre pour $G^{\bullet}$ un complexe de faisceaux plats en chaque degré, on a en fait écrit un morphisme

$$N : DF^{\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\boxtimes}} G^{\bullet} \longrightarrow R\,\mathcal{H}om_A(pr_X^* F^{\bullet}, pr^!_Y G^{\bullet})$$

indépendant des résolutions et du morphisme ρ choisi (confer 1.4.2.) et défini pour $F^{\bullet} \in \mathrm{Ob}\, D({}_A X)$ et $G^{\bullet} \in \mathrm{Ob}\, D^-({}_A Y)$.

3.2. Un diagramme commutatif .

Posons $\underline{N} = R\Gamma N$: c'est un A-morphisme de complexes

$$R\Gamma(X \times Y, DF^{\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\boxtimes}} G^{\bullet}) \longrightarrow R\mathrm{Hom}_A(pr_X^* F^{\bullet}, pr_Y^! G^{\bullet}) .$$

On se propose de construire, sous certaines hypothèses relatives aux faisceaux et aux espaces, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
R\mathrm{Hom}_A(pr_X^* F^{\bullet}, pr_Y^! G^{\bullet}) \arrow[r, "gr"] & R\mathrm{Hom}_A(R\Gamma_c(X,F), R\Gamma(Y,G^{\bullet})) \\
R\Gamma(X \times Y, DF^{\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\boxtimes}} G^{\bullet}) \arrow[u, "\underline{N}"] & R\Gamma_c(X,F)^* \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} R\Gamma(Y,G^{\bullet}) \arrow[l, "\tau"'] \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

où l'on a écrit gr au lieu de gr^{ψ} quand ψ est la famille de tous les fermés de Y (confer 2.1.) et où $R\Gamma_c(X,F)^*$ est le dual de $R\Gamma_c(X,F)$ i.e. le complexe $R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,F),A)$.

3.2.1. Lemme .

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de A-Modules à droite sur l'espace X et $\mathcal{G}$ un faisceau de A-Modules à gauche sur Y . On suppose que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont c-mous, et que $\mathcal{G}$ est A-plat. Alors $\mathcal{F} \overset{\boxtimes}{\underset{A}{}} \mathcal{G}$ est c-mou .

Démonstration : Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\
X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\
 & pt &
\end{tikzcd}$$

permet d'écrire

$$R\Gamma_c(X\times Y, \mathcal{F}\boxtimes_A \mathcal{G}) \underset{1}{\approx} R\Gamma_c(X\times Y, \mathcal{F}\overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_A \mathcal{G}) \underset{2}{\approx} R\pi_{X!}\mathcal{F}\overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\pi_{Y!}\mathcal{G}$$

$$\underset{3}{\approx} \Gamma_c(X,\mathcal{F})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A \Gamma_c(Y,\mathcal{G}) \underset{4}{\approx} \Gamma_c(X,\mathcal{F})\otimes_A \Gamma_c(Y,\mathcal{G}) \quad .$$

(l'isomorphisme 1 vient de ce que $\mathcal{G}$ est plat, 2 est la formule de Künneth, 3 résulte du fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont Γ_c-acycliques, et 4 du fait que $\mathcal{G}$ est c-mou et plat, et par conséquent $\Gamma_c(Y,\mathcal{G})$ <u>est plat</u> (confer exposé 3, haut de la page 16)) .

Le faisceau $\mathcal{F}\boxtimes_A \mathcal{G}$ est donc Γ_c-acyclique. Si U et V sont des ouverts de X et Y, alors $\mathcal{F}_U$ est c-mou et $\mathcal{G}_V$ c-mou et A-plat, et par conséquent, $(\mathcal{F}\boxtimes_A \mathcal{G})_{U\times V} = \mathcal{F}_U\boxtimes_A \mathcal{G}_V$ est Γ_c-acyclique. Pour montrer que $\mathcal{F}\boxtimes_A \mathcal{G}$ est c-mou, il suffit de démontrer que $(\mathcal{F}\boxtimes_A \mathcal{G})_W$ est Γ_c-acyclique pour tout ouvert W de $X\times Y$. Compte tenu de ce qui précède et de la définition de la topologie produit, cela résulte donc du lemme suivant :

3.2.2. <u>Lemme</u> .

<u>Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique $\mathfrak{X}$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$ ayant les propriétés suivantes</u> :

i) <u>Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$, il existe un sous-ensemble $J\subset I$ tel que</u> $U = \bigcup_{i\in J} U_i$.

ii) <u>Si U_i et U_j appartiennent à $\mathcal{U}$, il en va de même pour</u> $U_i\cap U_j$.

iii) <u>Si U_i appartient à $\mathcal{U}$, alors $H^q_c(U_i,\mathcal{F}) = 0$ pour $q>0$</u> .

<u>Alors on a $H^q_c(U,\mathcal{F}) = 0$ pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ (et par conséquent $\mathcal{F}$ est c-mou)</u> .

Démonstration : La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{U\cap V} \longrightarrow \mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V \longrightarrow \mathcal{F}_{U\cup V} \longrightarrow 0$$

(U,V ouverts de $\mathfrak{X}$) montre que $H^q_c(U,\mathcal{F})$ est nul pour $q>0$ lorsque U est une réunion finie d'ouverts de $\mathcal{U}$. Soit $U = \bigcup_{i\in J} U_i$ et posons $U_{i_1\ldots i_p} = U_i \cup\ldots\cup U_{i_p}$. On a $\mathcal{F}_U = \varinjlim \mathcal{F}_{U_{i_1\ldots i_p}}$; puisque la cohomologie à support compact commute aux limites inductives les égalités :

$$H^q_c(U,\mathcal{F}) = H^q_c(\mathfrak{X},\mathcal{F}_U) = \varinjlim H^q_c(\mathfrak{X},\mathcal{F}_{U_{i_1\ldots i_p}}) = \varinjlim H^q_c(U_{i_1\ldots i_p},\mathcal{F}) = 0$$

fournissent le résultat annoncé .

3.2.3. Nous avons pris $DF^\bullet = \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\pi^!_{X,\Omega_X} I A)$; c'est un complexe de faisceaux flasques en chaque degré, donc c-mous en chaque degré. Par ailleurs nous avons supposé que le complexe $G^\bullet$ était borné, c-mou et A-plat en chaque degré. En vertu de 3.2.1., le complexe $DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet$ est c-mou en chaque degré, puisque en chaque degré il est somme directe d'un nombre fini de faisceaux c-mous .

Nous supposons à partir de maintenant que les espaces topologiques Y et $X\times Y$ sont paracompacts. La famille de tous les fermés sur ces espaces est donc paracompactifiante, et il résulte de l'exposé 2, lemme 1.3. que les complexes $G^\bullet$ et $DF^\bullet \boxtimes G^\bullet$ sont des complexes de faisceaux mous . En particulier, il en résulte que les morphismes canoniques qui interviennent dans la définition des foncteurs dérivés :

$$\begin{tikzcd}
Q\Gamma(X,G) \arrow[r] & R\Gamma(Y,QG) \\
Q\Gamma(X\times Y, DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet) \arrow[r] & R\Gamma(X\times Y, Q(DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet)) \arrow[d, "(1)"'] \\
 & R\Gamma(X\times Y, QDF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes}_A QG^\bullet)
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes ((1) est un isomorphisme car $G^\bullet$ est un complexe de faisceaux plats) .

Enfin le complexe $R\Gamma_c(X,F^\bullet)^*$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(X,\Omega_X \underset{A}{\otimes} F^\bullet), I\,A) = DF^\bullet(X)$.

Soit alors $\eta : P(Y,G) \to \Gamma(Y,G^\bullet)$ une résolution A-plate à gauche du complexe (<u>borné</u>) $\Gamma(Y,G^\bullet)$, et soit τ le morphisme de Λ-complexe composé suivant

$$DF^\bullet(X) \underset{A}{\otimes} P(Y,G) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} DF^\bullet(X) \underset{A}{\otimes} \Gamma(Y,G) \xrightarrow[\text{des sections}]{\text{produit tensoriel}} \Gamma(X \times Y, DF^\bullet \underset{A}{\boxtimes} G^\bullet) .$$

Ce morphisme induit, au niveau des catégories dérivées un morphisme encore noté τ de $R\Gamma_c(X,F)^* \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} R\Gamma(Y,G)$ dans $R\Gamma(X \times Y, DF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\boxtimes}} G)$.

3.2.4. L'explicitation de ζ ne fait intervenir que des complexes de A-modules. Le problème est le suivant : construire un morphisme fonctoriel en $M^\bullet$ et $N^\bullet$

$$\zeta : \mathrm{RHom}_A^\bullet(M^\bullet,A) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} N^\bullet \longrightarrow \mathrm{RHom}_A(M^\bullet,N^\bullet)$$

lorsque $M^\bullet$ parcourt les objets de la catégorie $D(A)_g$ et $N^\bullet$ les objets de $D^b(A)_g$ (on a vu en effet que $\Gamma(Y,G)$ est un complexe borné) . Donnons nous à cet effet

i) Une résolution injective $A \xrightarrow{\varepsilon} I\,A$ de A par des bi-modules .

ii) Une résolution plate $P^\bullet \xrightarrow{\eta} N^\bullet$ de $N^\bullet$.

iii) Une résolution injective $N^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} I\,N^\bullet$ de $N^\bullet$.

Il existe un <u>unique</u> (à homotopie près) morphisme r' tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[r, "="] \arrow[d, "\eta"] & A \underset{A}{\otimes} P^\bullet \arrow[r, "\varepsilon \otimes \eta"] & I\,A \underset{A}{\otimes} P^\bullet \arrow[ddl, "r'"] \\
N^\bullet \arrow[d, "\varepsilon"] & & \\
I N^\bullet & &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. En effet l'unicité à homotopie près résulte par exemple de [H] chapitre I, lemme 4.5.. Quant à l'existence, elle provient du fait que $N^\bullet$ étant un complexe borné, et $\epsilon \otimes \eta$ un quasi-isomorphisme d'après Appendice, lemme 1.1., le complexe $IA \underset{A}{\otimes} P^\bullet$ n'a qu'un nombre fini de modules de cohomologie non nuls. Pour un entier n assez petit le morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
\to (IA\otimes P^\bullet)^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & (IA\otimes P^\bullet)^{n} \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "d^n"] & (IA\otimes P^\bullet)^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d] & (IA\otimes P^\bullet)^{n+2} \arrow[r] & \dots \\
\to \quad 0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d^n \arrow[r, hook] & (IA\otimes P^\bullet)^{n+1} \arrow[r, "d^{n+1}"] & (IA\otimes P^\bullet)^{n+2} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

de $(IA\otimes P^\bullet)$ sur la n-ième tronqué à gauche $(IA\otimes P^\bullet)_{>n}$ de $IA\otimes P^\bullet$ est donc un quasi-isomorphisme. Nous somme ramenés à la situation

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[r, dash, "qis"] \arrow[d, dash, "qis"'] & (IA\otimes P^\bullet)_{>n} \arrow[dl, dashed, "r''"] \\
IN^\bullet &
\end{tikzcd}$$

où cette fois, $(IA\otimes P^\bullet)_{>n}$ est un complexe limité à gauche : on sait qu'on peut compléter le diagramme de façon à le rendre commutatif par un morphisme r''. On définit alors r' comme le composé de r'' et de la projection $IA\otimes P^\bullet \to (IA\otimes P^\bullet)_{>n}$.

Le morphisme r' étant choisi, on définit ζ comme étant le composé

$$\operatorname{Hom}^\bullet(M^\bullet, IA) \underset{A}{\otimes} PN^\bullet \xrightarrow[\Sigma]{} \operatorname{Hom}(M^\bullet, IA \underset{A}{\otimes} PN^\bullet) \xrightarrow[\operatorname{Hom}(M^\bullet, r')]{} \operatorname{Hom}(M^\bullet, IN^\bullet)$$

où Σ est le morphisme défini dans 3.1.2. à partir de $\sigma : A \underset{A}{\otimes} ? \xrightarrow{\sim} ? \underset{A}{\otimes} A$, compte tenu du fait que $PN^\bullet = \operatorname{Hom}_A(A, PN^\bullet)$ (et aussi qu'un faisceau au-dessus d'un point est un module). Il reste encore une fois à voir que le morphisme ainsi défini est en fait un morphisme au niveau des catégories dérivées, ce qui ne présente aucune difficulté .

3.2.5. Dans la situation particulière qui nous intéresse, nous avons déjà noté $P(Y,G^\bullet) \xrightarrow{\eta} \Gamma(Y,G^\bullet)$ une résolution plate de $\Gamma(Y,G^\bullet)$, et nous disposons d'un quasi-isomorphisme $\epsilon_G : G^\bullet \to I\,G^\bullet$. Comme $\Gamma(Y,\epsilon_G)$ est un quasi-isomorphisme et que $\Gamma(Y,I\,G^\bullet)$ est un complexe injectif en chaque degré, on définit r' à l'aide de la résolution $\Gamma(Y,\epsilon_G) : \Gamma(Y,G^\bullet) \to \Gamma(Y,I\,G^\bullet)$ de $\Gamma(Y,G^\bullet)$.

<u>Proposition</u>.

<u>Soient</u> Y <u>et</u> $X \times Y$ <u>des espaces paracompacts</u>, $G^\bullet$ <u>un complexe borné plat et</u> c-<u>mou en chaque degré de</u> A-<u>Modules à gauche sur</u> Y, $F^\bullet$ <u>un complexe quelconque de</u> A-<u>Modules à gauche sur</u> X. <u>Alors le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y,pr_X^*\Omega_X} I^\bullet G^\bullet) \arrow[r, "gr"] & \mathrm{Hom}_A(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\bullet), \Gamma(Y, I\,G^\bullet)) \\
\Gamma(X \times Y, DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet) \arrow[u, "\underline{N}"] & \mathrm{Hom}_A(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\bullet), I\,A) \otimes_A P(Y,G^\bullet) \arrow[l, "\tau"'] \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

<u>est homotopiquement commutatif</u>.

<u>Démonstration</u> : Remarquons d'abord que $\underline{N} \circ \tau$ est égal à $N(X,Y) \circ (id \otimes \eta)$ (confer 3.1.1.). D'autre part, $gr \circ N(X,Y)$ apparaît dans le diagramme commutatif suivant (ou l'on a écrit Γ_c au lieu de $\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \gamma^{-1}"] \arrow[drr, dashed, "\Sigma"] & & \\
\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes \mathrm{Hom}(A,G^{\cdot}) \arrow[d, "(\text{par } \pi_Y^*) \otimes \mathrm{id}"] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot})) \arrow[d, dashed, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\ \text{produit tensoriel des sections})"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_Y^* \Gamma_c, \pi_Y^* IA) \otimes \mathrm{Hom}(A,G^{\cdot}) \arrow[d, "\Sigma"] & & \\
\mathrm{Hom}(\pi_Y^* \Gamma_c, \pi_Y^* IA \otimes G^{\cdot}) \arrow[rr, dashed, "\text{adjonction de } \pi^* \text{ à } \pi_*"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},r)"] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, \Gamma(\pi_Y^* I\,A \otimes G^{\cdot})) \arrow[d, dashed, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\Gamma r)"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_Y^* \Gamma_c, I\,G^{\cdot}) \arrow[rr, "\text{adjonction de } \pi^* \text{ à } \pi_*"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\rho^{-1}, IG^{\cdot})"] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, \Gamma I\,G^{\cdot}) \\
\mathrm{Hom}(pr_{Y!}\, pr_X^*(\Omega_X \otimes F), I\,G^{\cdot}) \arrow[d, "\text{Poincaré}"] & & \\
\mathrm{Hom}(pr_X^* F, pr^!_{Y,\, pr_X^* \Omega_X} I\,G^{\cdot}) \arrow[urr, "gr"] & &
\end{tikzcd}
$$

(confer 1.4.4. pour la commutativité du triangle) .

Il nous reste à voir que le diagramme suivant est homotopiquement commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes P(Y,G^{\cdot}) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \eta"] \arrow[d, "\Sigma"] & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A \otimes P(Y,G^{\cdot})) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{id} \otimes \eta)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},r')"] & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot})) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(\Gamma_c, \Gamma(Y, \Gamma\, G^{\cdot})) & \mathrm{Hom}(\Gamma_c, \Gamma(\pi_Y^* I\,A \otimes G^{\cdot})) \arrow[l, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \Gamma\, r)"']
\end{tikzcd}
$$

Comme le rectangle supérieur est commutatif (fonctorialité de Σ) nous sommes finalement conduit à montrer que le morphisme r' et le morphisme composé r''

$$I\,A \otimes P(Y,G^{\cdot}) \xrightarrow{id \otimes \eta} I\,A \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot}) \xrightarrow[\text{des sections}]{\text{produit tensoriel}} \Gamma(Y,\pi^* I\,A \otimes G^{\cdot}) \xrightarrow{\Gamma r} \Gamma(Y,I\,G^{\cdot})$$

sont homotopes, et pour cela il suffit de vérifier la commutativité du diagramme (confer 3.2.4.)

$$\begin{tikzcd}
P\,(Y,G^{\cdot}) \arrow[r, "\epsilon \otimes \eta"] \arrow[d, "\eta"] & I\,A \otimes P(Y,G^{\cdot}) \arrow[ddl, "r''"] \\
\Gamma(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\Gamma(Y,\epsilon_{G^{\cdot}})"'] & \\
\Gamma(Y,I\,G^{\cdot}) &
\end{tikzcd}$$

i.e. du diagramme

$$\begin{tikzcd}
P\,(Y,G^{\cdot}) \arrow[r, "\epsilon \otimes id"] \arrow[d, "\eta"] & I\,A \otimes P(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "id \otimes \eta"] \\
\Gamma(Y,G^{\cdot}) \arrow[r, dashed, "\epsilon \otimes id"] \arrow[d, "\Gamma(Y,\epsilon_{G^{\cdot}})"'] \arrow[dr, dashed, "\Gamma(Y,\epsilon \otimes id)"] & I\,A \otimes \Gamma(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\text{produit tensoriel des sections}"] \\
\Gamma(Y,I\,G^{\cdot}) & \Gamma(Y,\pi^* I\,A \otimes G^{\cdot}) \arrow[l, "\Gamma(Y,r)"']
\end{tikzcd}$$

mais le carré supérieur est commutatif, ainsi que le triangle inférieur (définition de r ! confer 3.1.). Enfin le triangle supérieur est commutatif, ainsi qu'on le vérifie sans peine, ce qui achève la démonstration .

3.3. Un diagramme commutatif (généralisation du précédent) .

On suppose ici que X , Y et par conséquent, $X \times Y$ sont localement compacts et paracompacts. On se donne sur Y une famille ψ paracompactifiante. Dans ces conditions, la famille Φ_ψ (confer 2) est paracompactifiante.

[Le seul point non trivial à vérifier est que tout élément Z de Φ_ψ possède un voisinage qui est un élément de Φ_ψ . Puisque X est paracompact et localement compact, il existe un recouvrement localement fini de X par des ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ tels que $\bar{U}_\alpha$ soit compact. Alors si K est un compact quelconque de X , $K \cap \bar{U}_\alpha$ est vide sauf pour un nombre fini d'indices α . Pour tout indice α il existe un S_α dans ψ tel que $Z \cap (\bar{U}_\alpha \times Y)$ soit contenu dans $\bar{U}_\alpha \times S_\alpha$. Soit S'_α un voisinage de S_α qui est un élément de ψ . Alors $\bigcup_{\alpha \in I} \bar{U}_\alpha \times S'_\alpha$ est un voisinage de Z qui est un élément de Φ_ψ] .

On reprend les autres hypothèses de 3.2. à savoir :

$G^\bullet$ est un complexe borné plat et c-mou en chaque degré de A-Modules à gauche sur Y et $F^\bullet$ un complexe quelconque de A-Modules à gauche. D'après (exposé 2, lemme 1.3.) $G^\bullet$ est donc un complexe de faisceaux Γ_ψ-acycliques et $DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet$ un complexe de faisceaux Γ_{Φ_ψ}-acycliques (confer aussi 3.2.1. et 3.2.3.) .

3.3.1. Il est clair que le produit tensoriel des sections est un morphisme

$$DF^\bullet(X) \otimes \Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \xrightarrow{\otimes} \Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet) .$$

Soit alors $\eta_\psi : P\Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \to \Gamma_\psi(Y,G^\bullet)$ une résolution projective de $\Gamma_\psi(Y,G^\bullet)$ et soit τ_ψ le composé

$$DF^\bullet(X) \otimes P\Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \xrightarrow{id \otimes \eta_\psi} DF^\bullet \otimes \Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \xrightarrow{\otimes} \Gamma_{\Phi_\psi}(X \times Y, DF^\bullet \boxtimes_A G^\bullet) .$$

De même, soit $\epsilon_\psi : \Gamma_\psi I G^\cdot \to I\Gamma_\psi I G^\cdot$ une résolution injective de $\Gamma_\psi I G^\cdot$ et r_ψ l'unique à homotopie près morphisme de résolutions tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
P\Gamma_\psi(Y,G^\cdot) \arrow[d, "\eta_\psi"] \arrow[ddr, "\epsilon\otimes id"] & \\
\Gamma_\psi(Y,G^\cdot) \arrow[d, "\Gamma_\psi(\epsilon_{G^\cdot})"] & \\
\Gamma_\psi(Y,IG^\cdot) \arrow[d, "\epsilon_\psi"] & \\
I\Gamma_\psi(IG^\cdot) & I A \otimes P\Gamma_\psi(Y,G^\cdot) \arrow[l, "r_\psi"']
\end{tikzcd}$$

[Tous les morphismes de ce diagramme sont des quasi-isomorphismes ; en particulier $\Gamma_\psi(Y,\epsilon_{G^\cdot})$ est un quasi-isomorphisme car $G^\cdot$ est un complexe de faisceaux Γ_ψ-acycliques !] .

A l'aide de r_ψ on définit un morphisme

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\cdot), I A) \underset{A}{\otimes} P\Gamma_\psi(Y,G^\cdot) \xrightarrow[\zeta_\psi]{} \mathrm{Hom}(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^\cdot), I\Gamma_\psi(Y,IG^\cdot))$$

(confer 3.2.4.) .

3.3.2. <u>Proposition</u> .

<u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>des espaces paracompacts et localement compacts, et soit</u> ψ <u>une famille paracompactifiante de fermés sur</u> Y ; <u>soit</u> $F^\cdot$ <u>un complexe de</u> $D({}_A\underline{X})$ <u>et</u> $G^\cdot$ <u>un complexe de</u> $D^b_{apf}({}_AY)$. <u>Alors le diagramme</u> :

$$\begin{tikzcd}
H^{\circ}_{\Phi_\psi}(X\times Y, R\,\mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^! G^\bullet)) \arrow[r, "H^\circ gr^\psi"] & H^\circ R\,Hom(R\Gamma_c(X,F^\bullet), R\Gamma_\psi(Y,G^\bullet)) \\
H^{\circ}_{\Phi_\psi}(X\times Y, DF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\boxtimes}} G^\bullet) \arrow[u, "R^\circ\Gamma_{\Phi_\psi} N"] & H^\circ(R\Gamma(X,DF^\bullet) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} R\Gamma_\psi(Y,G^\bullet)) \arrow[l, "H^\circ\tau_\psi"] \arrow[u, "H^\circ\zeta_\psi"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif .

(on a noté par les mêmes symboles les morphismes τ_ψ , ζ_ψ et ceux qu'ils induisent dans les catégories dérivées) .

Démonstration : Supposons de nouveau que les complexes $F^\bullet$ et $G^\bullet$ vérifient les hypothèses de 3.3. . Soit S un fermé de ψ . Puisque Γ_ψ est la limite inductive des Γ_S , on peut choisir des résolutions projectives $\eta_S : P\Gamma_S(Y,G^\bullet) \to \Gamma_S(Y,G^\bullet)$, $\eta_\psi : P\Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \to \Gamma_\psi(Y,G^\bullet)$ de façon que les $P\Gamma_S(Y,G^\bullet)$ forment un système inductif, que la famille des η_S définisse un morphisme de système inductifs, et enfin que η_ψ soit égal à $\varinjlim_{S\in\psi} \eta_S$ (confer C.E.V 9.5.). On choisit donc η_S et η_ψ de façon qu'il en soit bien ainsi .

Nous allons montrer que le diagramme (*) suivant est homotopiquement commutatif (i.e. les deux chemins qu'il définit sont homotopes)

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{\Phi_\psi}(X\times Y, \mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr^!_{Y,pr_X^*\Omega_X} I^\bullet G^\bullet)) \arrow[r, "gr^\psi"] & Hom(\Gamma_c(X,\Omega_X\otimes F^\bullet), I\Gamma_\psi(Y,IG^\bullet)) \\
\Gamma_{\Phi_\psi}(X\times Y, DF^\bullet \boxtimes G^\bullet) \arrow[u, "\Gamma_{\Phi_\psi} N"] & Hom(\Gamma_c(X,\Omega_X\otimes F^\bullet), IA)\otimes P\Gamma_\psi(Y,G^\bullet) \arrow[l, "\tau_\psi"'] \arrow[u, "\zeta_\psi"'] \\
 & Hom(\Gamma_c(X,\Omega_X\otimes F^\bullet), IA)\otimes P\Gamma_S(Y,G^\bullet) \arrow[u, "\text{par } P\Gamma_S\to P\Gamma_\psi = \varinjlim P\Gamma_S"]
\end{tikzcd}$$

(*)

Prenons l'homologie de degré zéro de ce diagramme. Les deux morphismes $H^o(gr^{\psi} \circ \Gamma_{\Phi_{\psi}} N \circ r_{\psi})$ et $H^o(\zeta_{\psi})$ ont mêmes composés avec l'application canonique

$$H^o(\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes P\,\Gamma_S) \longrightarrow H^o(\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes P\Gamma_{\psi})$$

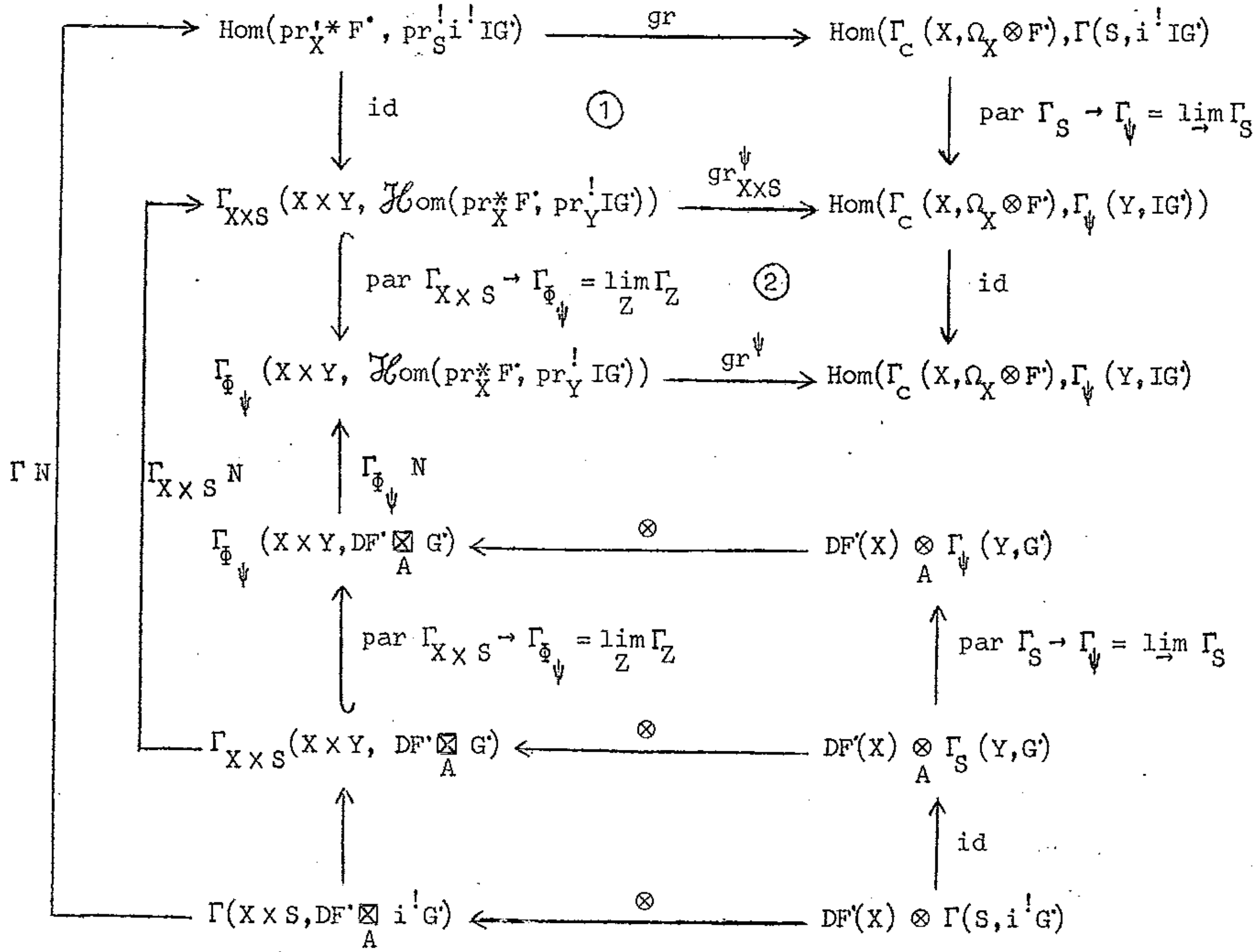
induite par l'inclusion de Γ_S dans Γ_{ψ} .

De l'égalité

$$H^o(\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes P\,\Gamma_{\psi}) = \varinjlim_{S \in \psi} H^o(\mathrm{Hom}(\Gamma_c, I\,A) \otimes P\,\Gamma_S) ,$$

la commutativité du diagramme donné dans la proposition résulte aussitôt.

Notons donc $i : S \hookrightarrow Y$ l'inclusion ; le faisceau constant A étant i-mou, $\mathrm{id}\,A : A \to A$ est une résolution c-molle et plate de A . On écrira $i^!$ au lieu de $i^!_A$. On sait (confer exposé 4bis) que l'on a $i^! G = i^* \mathcal{H}_S G$ où $\mathcal{H}_S$ (confer exposé 2) est le foncteur "faisceau à support dans S " . Mais alors $\Gamma_S(Y,G)$ est égal à $\Gamma(S, i^! G)$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :



(pr'_X est la projection $X \times S \to X$, pr_S est la projection $X \times S \to S$; on a écrit $pr^!_S$ au lieu de $pr^!_{S, pr'^*_X \Omega_X}$ et $pr^!_Y$ au lieu de $pr^!_{Y, pr^*_X \Omega_X}$. On aurait du écrire $I\, i^! G^\cdot$ mais $i^!$ transforme injectif en injectif et $i^! \epsilon_{G^\cdot} : i^! G^\cdot \to i^! I\, G^\cdot$ est une résolution par des faisceaux injectifs du complexe $i^! G^\cdot$: c'est la résolution que l'on suppose donnée pour effectuer les constructions) .

La vérification de la commutativité est pratiquement triviale ainsi la commutativité de ② a-t-elle été démontrée dans 2.1.5. . Seule la commutativité du rectangle ① n'est pas immédiatement évidente : on renvoie le lecteur aux définitions de gr et $g^\psi_{X \times S}$; moyennant un peu de chasse aux diagrammes, il parviendra facilement au résultat.

Mais on a :

$$DF^{\cdot}(X) \otimes \Gamma_{\psi}(Y,G^{\cdot}) = \varinjlim_{S} DF^{\cdot}(X) \otimes \Gamma_{S}(Y,G^{\cdot})$$

et

$$DF^{\cdot}(X) \otimes P\Gamma_{\psi}(Y,G^{\cdot}) = \varinjlim_{S} DF^{\cdot}(X) \otimes P\Gamma_{S}(Y,S)$$

Soit alors r_S l'unique (à homotopie près) morphisme de résolution tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
P\,\Gamma_S(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\eta_S"] \arrow[ddr, "\epsilon \otimes id"] & \\
\Gamma_S(Y,G^{\cdot}) \arrow[d, "\Gamma_S(\epsilon_{G^{\cdot}})"] & \\
\Gamma_S(Y,I\,G^{\cdot}) & I\,A \otimes P\Gamma_S(Y,G^{\cdot}) \arrow[l, "r_S"]
\end{tikzcd}$$

($\Gamma_S(Y,I\,G^{\cdot}) = \Gamma(S,i^{!}I\,G^{\cdot})$ est un complexe de modules injectifs en chaque degré), soit commutatif, et soit $\zeta_S : DF^{\cdot}(X) \otimes P\Gamma_S(Y,G^{\cdot}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma_c(X,\Omega_X \otimes F^{\cdot}),\Gamma_S(Y,IG^{\cdot}))$ le morphisme défini par r_S (confer 3.2.4.) . De la commutativité du grand diagramme, et de la proposition 3.2.5. (avec $Y = S$ et $G^{\cdot} = i^{!}G^{\cdot}$) résulte que pour démontrer 3.3.2. il suffit de montrer que le diagramme (en trait plein)

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,\Gamma_S\,I\,G^{\cdot}) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}(id,\epsilon_{\psi} \circ in_S)"] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,I\,\Gamma_{\psi}\,IG^{\cdot}) \\
\zeta_S & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,I\,A \otimes P\,\Gamma_S\,G^{\cdot}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(id,r_S)"] \arrow[rr, dashed, "\mathrm{Hom}(id,id \otimes in_S)"'] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,I\,A \otimes P\,\Gamma_{\psi}\,G^{\cdot}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(id,r_{\psi})"'] \quad \zeta_{\psi} \\
\arrow[r] & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,I\,A) \otimes P\,\Gamma_S G^{\cdot}) \arrow[u] \arrow[rr, "id \otimes in_S"'] & & \mathrm{Hom}(\Gamma_c,I\,A) \otimes P\,\Gamma_{\psi}\,G^{\cdot} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif à homotopie près (in_S désigne le morphisme canonique de l'objet indicé par S dans la limite inductive). Comme le rectangle inférieur est commutatif, nous avons finalement à montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I A \otimes P\Gamma_S G^\bullet \arrow[r, "r_S"] \arrow[d, "id \otimes in_S"] & \Gamma_S I G^\bullet \arrow[dr, "in_S"] & \\
 & & \Gamma_\psi I G^\bullet \arrow[dl, "\epsilon_\psi"] \\
I A \otimes P\Gamma_\psi \arrow[r, "r_\psi"'] & I\Gamma_\psi I G^\bullet &
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif. Puisque $I\Gamma_\psi IG^\bullet$ est un complexe limité à gauche, et injectif en chaque degré il suffit de montrer que les deux morphismes

$$\epsilon_\psi \circ in_S \circ r_S \qquad \text{et} \qquad r_\psi \circ (id \otimes in_S)$$

sont égaux lorsqu'on les compose à droite par $\epsilon \otimes id : P\Gamma_S G^\bullet \to I A \otimes P\Gamma_S G^\bullet$ (en effet $\epsilon \otimes id$ est un quasi isomorphisme ; l'affirmation résulte donc de la propriété FR3 des quasi-isomorphismes, et du lemme 4.5. de [H]). Mais cette égalité résulte aussitôt du diagramme

$$\begin{tikzcd}
P\Gamma_\psi G^\bullet \arrow[d, "\eta_\psi"] \arrow[ddd, bend right=60, "\epsilon \otimes id"'] & P\Gamma_S G^\bullet \arrow[l, "in_S"'] \arrow[d, "\eta_S"] \arrow[ddd, bend left=60, "\epsilon \otimes id"] \\
\Gamma_\psi G^\bullet \arrow[d, "\Gamma_\psi \epsilon_{G^\bullet}"] & \Gamma_S G^\bullet \arrow[l, "in_S"] \arrow[d, "\Gamma_S \epsilon_{G^\bullet}"] \\
\Gamma_\psi I G^\bullet \arrow[d, "\epsilon_\psi"] & \Gamma_S I G^\bullet \arrow[l, "in_S"] \\
I\Gamma_\psi I G^\bullet \arrow[ur, "r_\psi"] \arrow[r, phantom, "1"] & \\
I A \otimes P\Gamma_\psi G^\bullet & I A \otimes P\Gamma_S G^\bullet \arrow[l, "id \otimes in_S"] \arrow[uu, "r_S"']
\end{tikzcd}$$

où tout est commutatif sauf la région 1 .

4 . Le théorème du noyau et ses applications .

4.0. De la perfection .

Rappelons qu'un complexe de modules est dit parfait s'il est borné et libre de type fini en chaque degré. Plus généralement, on dira qu'un complexe de faisceaux $F^{\cdot}$ (resp. $G^{\cdot}$) est homologiquement parfait (resp. cohomologiquement parfait) s'il est d'amplitude plate finie (confer 3.0.1.) et si les systèmes projectifs locaux (resp. inductif locaux) sont essentiellement parfaits (dans la catégorie $D(A)_g$). D'après (exposé 6, prop. 5.4.) un complexe de faisceaux $F^{\cdot}$ (resp. $G^{\cdot}$) d'amplitude plate finie est homologiquement (resp. cohomologiquement) parfait si et seulement si, pour tout ouvert U de l'espace de base, il existe un ouvert $U' \subset U$ tel que le morphisme canonique

$$R\Gamma_c(U',F^{\cdot}) \longrightarrow R\Gamma_c(U,F^{\cdot}) \quad (\text{resp. } R\Gamma(U,G^{\cdot}) \longrightarrow R\Gamma(U',G^{\cdot}))$$

se factorise à travers un complexe parfait .

Nous aurons besoin d'utiliser le lemme technique suivant :

4.0.1. On a exhibé (confer 3.2.4.) un morphisme bi-fonctoriel

$$\zeta : RHom^{\cdot}_A(M^{\cdot},A) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} N^{\cdot} \longrightarrow RHom^{\cdot}_A(M^{\cdot},N^{\cdot})$$

défini pour $M^{\cdot} \in Ob\, D(A)_g$ et $N^{\cdot} \in Ob \cdot D^b(A)_g$, la Λ-algèbre A étant supposé plate sur Λ .

Si le complexe $M^{\cdot}$ est un objet de $D^-(A)_g$ on peut le résoudre par un complexe libre en chaque degré, soit $L(M)$ une telle résolution. On peut alors définir ζ par passage aux catégories dérivées à partir du morphisme composé (notation de 3.2.4.)

$$Hom^{\cdot}(L(M^{\cdot}),A) \underset{A}{\otimes} N^{\cdot} \xrightarrow{\Sigma} Hom^{\cdot}(L(M^{\cdot}),A \otimes N^{\cdot}) \longrightarrow Hom^{\cdot}(L(M^{\cdot}),N^{\cdot})$$

Par un raisonnement analogue à celui de ([D] prop. 3.3.) on en déduit le lemme

Lemme a) Si $M^\bullet$ ou $N^\bullet$ est un complexe parfait, ζ est un isomorphisme .

b) Supposons que $M^\bullet$ soit un objet de $D^-(A)_g$ et soit α un élément de $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M^\bullet, N^\bullet) = H^0 R\,\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet)$. Si α appartient à l'image de $H^0(\zeta)$, alors α se factorise à travers un complexe parfait .

4.1. On reprend maintenant la convention 3.0. pour les espaces X et Y : on supprime donc les hypothèses de paracompacité utilisées depuis 3.2. .

Théorème .

Soient $F^\bullet$ un complexe de $D({}_AX)$ et $G^\bullet$ un complexe de $D^b_{apf}({}_AY)$. Lorsque $F^\bullet$ est homologiquement parfait ou lorsque $G^\bullet$ est cohomologiquement parfait, le morphisme noyau

$$N : D F' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\bullet \longrightarrow R\,\mathcal{H}om(pr_X^* F', pr_Y^! G')$$

est un isomorphisme .

Démonstration : Elle utilise quelques sorites sur le diagramme de la proposition 3.2.5. que nous allons exposer pour commencer. Soient U et V des ouverts de X et Y ; désignons par $N(U \times V)$ le morphisme induit par N au niveau des sections au-dessus de $U \times V$, et par $N_{U,V}$ le morphisme noyau défini sur les espaces U et V et les faisceaux $F'|U$, $G'|V$. Il n'est pas difficile de montrer que moyennant quelques identifications canoniques, le morphisme $N(U \times V)$ s'identifie au morphisme $\underline{N}_{U,V} (= \Gamma \circ N_{U,V})$. Supposons que les ouverts U et V ainsi que les ouverts $U' \subset U$, $V' \subset V$ soient paracompacts (U,V,U',V' étant localement compacts, il en résulte que les ouverts $U \times V$ et $U' \times V'$ sont aussi paracompacts). Il résulte de ce qui précède et de 3.2.5. que pour tout entier q , le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^q R\Gamma(U'\times V', R\mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^! G^\bullet)) \arrow[rr, "H^q gr"] & & H^q R\,Hom(R\Gamma_c(U',F^\bullet), R\Gamma(V',G^\bullet)) \\
H^q R\Gamma(U\times V, R\mathcal{H}om(pr_X^* F^\bullet, pr_Y^! G^\bullet) \arrow[u] \arrow[ur] & H^q gr & H^q R\,Hom(R\Gamma_c(U,F^\bullet), R\Gamma(V,G^\bullet)) \arrow[u] \\
H^q R\Gamma(U\times V, DF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\bullet) \arrow[u, "H^q N(U\times V)"] \arrow[d] & & H^q(R\,Hom(R\Gamma_c(U,F^\bullet),A) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(V,G^\bullet)) \arrow[ll, "H^q\tau"] \arrow[u, "H^q\zeta"] \arrow[d] \\
H^q R\Gamma(U'\times V', DF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\bullet) \arrow[uu, "(U'\times V')"] & & H^q(R\,Hom(R\Gamma_c(U',F^\bullet),A) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(V',G^\bullet)) \arrow[ll, "H^q\tau"] \arrow[u, "H^q\zeta"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches obliques sont définies par les restrictions de U (resp. V) à U' (resp. V') est commutatif .

Soit maintenant (x,y) un point de $X \times Y$. Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que

$$\varinjlim_{U\times V} H^q N(U\times V)$$

est un isomorphisme pour tout entier q , <u>où</u> U <u>et</u> V <u>parcourent l'ordonné filtrant des ouverts paracompacts de</u> x <u>et</u> y . Comme $H^q gr$ est un isomorphisme, il suffit donc de voir que

$$\varinjlim_{U\times V} H^q\tau \quad \text{et} \quad \varinjlim_{U\times V} H^q\zeta$$

sont des isomorphismes .

Par définition, $\varinjlim \tau$ n'est autre que l'isomorphisme

$$DF'_x \overset{\mathbb{L}}{\otimes} G'_y \longrightarrow (DF^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\bullet)_{(x,y)}$$

Enfin les hypothèses faites sur $F^\bullet$ ou $G^\bullet$ et le lemme 4.0.1. a) montrent que $\varinjlim H^q\zeta$ est aussi un isomorphisme .

4.2. Théorème .

Lorsque $G^{\cdot}$ est cohomologiquement parfait, pour tout compact K de Y et tout ouvert $V \supset K$, le morphisme canonique $R\Gamma(V,G^{\cdot}) \to R\Gamma(K,G^{\cdot})$ se factorise par un complexe parfait .

Démonstration : Il existe un compact K' tel que l'on a les inclusions : $K \subset \overset{\circ}{K'} \subset K' \subset V$. Il existe donc un système fondamental de voisinages ouverts paracompacts W de K contenu dans K' . Nous allons montrer que l'on peut choisir W pour que en plus, le morphisme canonique $R\Gamma(K',G^{\cdot}) \to R\Gamma(W,G^{\cdot})$ se factorise à travers un complexe parfait, et le théorème en résultera aussitôt. A cet effet, remarquons d'abord que la notion de perfection cohomologique est locale et que par conséquent $G^{\cdot}|W$ est cohomologiquement parfait. Soit $F^{\cdot} = G^{\cdot}|K'$ et soit $\bar{G}^{\cdot} = G^{\cdot}|W$. D'après 3.2.5., on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{\circ}.R\,\mathrm{Hom}(pr_{K'}^{*}\, F^{\cdot}, pr_{W}^{!}\, \bar{G}^{\cdot}) \arrow[r, "\approx"] & H^{\circ}\, R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma(K',F^{\cdot}), R\Gamma(W,G^{\cdot})) \\
H^{\circ}(K' \times W, DF^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \bar{G}^{\cdot}) \arrow[u, "H^{\circ}\underline{N}", "\approx"'] & H^{\circ}(R\Gamma(K',DF^{\cdot}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(W,G^{\cdot})) \arrow[l, "H^{\circ}\tau"'] \arrow[u, "H^{\circ}\zeta"']
\end{tikzcd}$$

Soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_{D(A)_g}(R\Gamma(K',G^{\cdot}), R\Gamma(W,G^{\cdot})) = H^{\circ}R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma(K',G^{\cdot}), R\Gamma(W,G^{\cdot}))$ le morphisme canonique. D'après le théorème 4.1., il provient d'un élément α_W de $H^{\circ}(K' \times W, DF^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \bar{G}^{\cdot})$. Mais il résulte immédiatement des définitions (confer 3.2.3. et exposé 3, prop. 4.5.) que l'on a l'égalité

$$\varinjlim_{W} \tau = Ku''$$

où l'on prend la limite suivant l'ordonné filtrant des voisinages paracompacts de K . A la limite, on a donc l'isomorphisme

$$H^{\circ}(K' \times K, DF^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} (G^{\cdot}|K)) \xleftarrow{\tau = Ku''} H^{\circ}(R\Gamma(K',DF^{\cdot}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma(K,G^{\cdot}))$$

Cela signifie qu'il existe un W assez petit tel que α_W appartienne à l'image de $H^0\tau$, i.e. tel que α appartienne à l'image de $H^0\zeta$: le lemme 4.0.1. b) permet alors de conclure.

4.3. Théorème.

Soit $F^\cdot$ un complexe homologiquement parfait. Soient U et V des ouverts de X tels que l'on ait $U \subset \bar{U} \subset V$ et que $\bar{U}$ soit compact. Alors le morphisme canonique $R\Gamma_c(U,F^\cdot) \to R\Gamma_c(V,F^\cdot)$ se factorise à travers un complexe parfait.

Démonstration : Il existe un ouvert paracompact V' et un système fondamental de voisinages ouverts paracompacts U' du compact $\bar{U}$ tel que l'on ait les inclusions $U \subset \bar{U} \subset U' \subset \bar{U}' \subset V' \subset V$. Nous allons montrer qu'on peut choisir U' assez petit pour que le morphisme canonique $\Gamma_c(U',F^\cdot) \to \Gamma_c(V',F^\cdot)$ se factorise à travers un complexe parfait. A cet effet soit Φ la famille de tous les compacts de V'. La famille Φ_ψ de $U' \times V'$ est donc composée des fermés de $U' \times V'$ propres sur U'. Appliquons la proposition 3.3.2. : nous obtenons un diagramme commutatif (où $G^\cdot = F^\cdot | V'$ et $\bar{F}^\cdot = G^\cdot | V'$)

$$\begin{tikzcd}
H^0 R\Gamma_{\Phi_\psi}(U' \times V', R\mathcal{H}om(pr_{U'}^* \bar{F}^\cdot, pr_{V'}^! G^\cdot)) \arrow[r, "H^0 gr\,\psi"] & H^0 R\,Hom(R\Gamma_c(U',F^\cdot)), R\Gamma_c(V',G^\cdot)) \\
H^0_{\Phi_\psi}(U' \times V', DF^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\cdot) \arrow[u, "R^0\Gamma_{\Phi_\psi} N_{U',V'}"', "\approx"] & H^0(R\Gamma(U',DF^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_c(V',G^\cdot)) \arrow[l, "H^0\tau_\psi"] \arrow[u, "H^0\zeta_\psi"']
\end{tikzcd}$$

Comme $R^0\Gamma_{\Phi_\psi} N_{U',V'}$ est un isomorphisme d'après 4.1., il résulte de la proposition 2.1.5. qu'il existe un élément $\alpha_{U'}$ dont l'image dans $H^0R\,Hom(R\Gamma_c(U',F^\cdot), R\Gamma_c(V',G^\cdot))$ est l'élément canonique $\alpha : R\Gamma_c(U',F^\cdot) \to R\Gamma_c(V',G^\cdot)$; mais $\Phi_\psi | \bar{U} \times V'$ est la famille de tous les compacts : il en résulte que $\varinjlim_{U' \supset \bar{U}} H^0\tau_\psi = Ku''$ est un isomorphisme. On peut donc choisir U' assez petit pour que $\alpha_{U'}$ soit l'image d'un élément de $H^0(R\,F^\cdot(U',DF^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} R\Gamma_c(V',G^\cdot))$

i.e. pour que α soit dans l'image de $H^{\circ}\zeta_{\psi}$: le lemme 4.0.1. b donne le résultat cherché .

4.4. <u>Théorème</u> .

<u>Soit $F^{\cdot}$ un complexe de faisceaux d'amplitude plate finie. Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u>

(i) $F^{\cdot}$ <u>est cohomologiquement parfait</u> .

(ii) $F^{\cdot}$ <u>est homologiquement parfait</u> .

Ce théorème permet de poser la définition suivante .

<u>Définition</u> . Un complexe de faisceaux d'amplitude plate finie est dit <u>parfait</u> s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 4.4. .

<u>Démonstration du théorème 4.4.</u> : elle est tout à fait analogue à celle des théorèmes 4.2. et 4.3. .

4.4.1. (i) $\Rightarrow$ (ii) . Soient x un point de l'espace de base et V' un ouvert contenant x . Soit enfin $U' \subset V'$ un ouvert contenant x . Dans le diagramme de 4.3., $R^{\circ}\Gamma_{\Phi_{\psi}} N_{U',V'}$ est un isomorphisme puisque $F^{\cdot}$ est cohomologiquement parfait, et la limite inductive de $H^{\circ}\tau_{\psi}$ lorsque U' parcourt les ouverts contenus dans U' et contenant U est un isomorphisme. Pour U' assez petit l'application canonique $R\Gamma_c(U',F^{\cdot}) \to R\Gamma_c(V',G^{\cdot})$ se factorise donc à travers un complexe parfait.

4.4.2. (ii) $\Rightarrow$ (i) . Soient de nouveau $x \in U$, un ouvert et considérons des ouverts V et U' tels que l'on ait les relations $x \in V \subset K \subset U' \subset U$ où K est un compact fixe. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{\circ} R\Gamma(U' \times V, R\mathcal{H}om(pr_U^*, \bar{F}^{\cdot}, pr_V^! G^{\cdot})) \arrow[r] & H^{\circ} R\,Hom(R\Gamma(U',F^{\cdot}), R\Gamma(V,F^{\cdot})) \\
H^{\circ}(U' \times V, D\bar{F}^{\cdot} \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^{\cdot}) \arrow[u, "H^{\circ}\underline{N}"] & H^{\circ}(R\Gamma(U',DF^{\cdot}) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} R\Gamma(V,F^{\cdot})) \arrow[l, "H^{\circ}\tau"'] \arrow[u, "H^{\circ}\zeta"']
\end{tikzcd}$$

où on a posé $\bar{F}' = F'|U'$ et $G' = F'|V$. Comme précédemment $H^o \underline{N}$ est un isomorphisme puisque $\bar{F}^\cdot$ est homologiquement parfait et $\varinjlim_{x \in V, U' \supset K} H^o \tau = K''$ est un isomorphisme. Il en résulte encore que pour U' et V assez petit, le morphisme de restriction $R\Gamma(U',F^\cdot) \to R\Gamma(V,F^\cdot)$ i.e. le morphisme de restriction $R\Gamma(U,F^\cdot) \to R\Gamma(V,F^\cdot)$ se factorise à travers un complexe parfait.

5. Caractérisation des complexes parfaits lorsque l'anneau A est noethérien.

Soit X un espace localement compact de A-dim-top finie où A est un anneau commutatif noethérien. Alors π_X vérifie la condition $\Delta(A)$ (confer exposé 4). Rappelons (confer exposé 7, théorème 3) la définition suivante :

Définition.

On dit qu'un complexe de faisceaux vérifie la condition de Wilder si les systèmes inductifs locaux sont essentiellement de type fini.

Cela signifie que pour tout point x et tout voisinage ouvert U de x, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que l'image de $H^q(U,F^\cdot)$ dans $H^q(V,F^\cdot)$ par l'homomorphisme de restriction soit de type fini, lorsque $F^\cdot$ vérifie la condition de Wilder.

5.1. Proposition.

Soit X un espace localement compact de A-dim-top finie sur un anneau commutatif noethérien A. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) $F^\cdot$ est un complexe parfait de $D^b_{apf}({}_AX)$.

(ii) $F^\cdot$ est un complexe vérifiant la condition de Wilder de $D^b_{apf}({}_AX)$.

Démonstration : Il est clair que (i) implique (ii) . Soit donc $F^{\bullet}$ un complexe de faisceaux vérifiant la condition (ii), et soit U un ouvert paracompact de X contenant un point x . Soient U' , V des ouverts et K un compact tel que l'on ait les inclusions

$$\{x\} \subset V \subset K \subset U' \subset U$$

et tels que l'application canonique

$$R\Gamma(U,F^{\bullet}) \longrightarrow R\Gamma(U',F^{\bullet})$$

se factorise à travers un complexe de type fini $M^{\bullet}$ (cela est possible d'après exposé 7, théorème 3, i ⇒ iii) ; alors la restriction

$$R\Gamma(U,F^{\bullet}) \longrightarrow R\Gamma(K,F^{\bullet})$$

se factorise à travers $M^{\bullet}$. Comme on peut supposer que $F^{\bullet}$ est un complexe borné, c-mou et plat, donc (en particulier mou sur U) , ce morphisme se réduit simplement à

$$\Gamma(U,F^{\bullet}) \longrightarrow \Gamma(K,F^{\bullet})$$

et $\Gamma(K,F^{\bullet})$ est un complexe borné et plat en chaque degré (exposé 3) . Pour démontrer que la restriction $R\Gamma(U,F^{\bullet}) \to R\Gamma(V,F^{\bullet})$ se factorise à travers un complexe parfait il suffit de démontrer le

5.2. Lemme .

Soient $M^{\bullet} \to N^{\bullet}$ un morphisme de complexes de A-modules. Si $M^{\bullet}$ est de type fini en chaque degré et borné, et si $N^{\bullet}$ est plat en chaque degré et borné, ce morphisme se factorise à travers un complexe parfait .

Démonstration : Supposons que l'on ait construit, pour tout $p < n$ où p et n sont des entiers, un module libre de type fini L^p , des morphismes d_L^{p-1}, i^p, j^p tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M^{p-1} \arrow[rr, "d_M^{p-1}"] \arrow[dr, "i^{p-1}"] \arrow[dd, "f^{p-1}"'] & & M^p \arrow[dl, "i^p"'] \arrow[dd, "f^p"] \\
& L^{p-1} \arrow[r, "d_L^{p-1}"'] \arrow[dl, "j^{p-1}"] & L^p \arrow[dr, "j^p"] \\
N^{p-1} \arrow[rr, "d_N^{p-1}"'] & & N^p
\end{tikzcd}$$

soit commutatif et que $d_L^p \circ d_L^{p-1} = 0$ pour $p < n-1$.

Si n est assez petit, cela est évidemment possible puisque les complexes, étant bornés, sont nuls en degré assez petits. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de construire L^n, i^n, j^n et d_L^{n-1} .

Comme M^n est de type fini, et que l'anneau A est noethérien, il existe une présentation finie $P_2 \xrightarrow{u} P_1 \xrightarrow{v} M^n \to 0$ de M^n ; comme N^n est plat, ont peut d'après D. Lazard, écrire $N^n = \varinjlim_{\alpha \in I} L_\alpha$ où I est ordonné filtrant et L_α libre de type fini pour tout α . Considérons alors le diagramme en traits pleins

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[d, "u"'] & & \\
P_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "v"'] & & L_\alpha \arrow[d, "in_\alpha"] \\
M^n \arrow[rr, "f^n"'] \arrow[urr, dashed, "i_\alpha"] \arrow[d] & & N^n \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

où in_α est l'application canonique de L_α dans $\varinjlim L_\alpha$. Puisque P_1 est libre de type fini, on peut choisir α assez grand pour qu'il existe un relèvement φ_α de f^n i.e. une application vérifiant l'égalité $in_\alpha \circ \varphi_\alpha = f^n \circ v$. Mais alors $in_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ u$ est nul : utilisant le fait que

P_2 est de type fini, on voit facilement qu'on peut augmenter α de façon a avoir aussi l'égalité $\varphi_\alpha \circ u = 0$. Alors φ_α se factorise à travers M^n et définit une application i_α qui vérifie l'égalité $in_\alpha \circ i_\alpha = f^n$.

Nous sommes donc dans la situation représentée par le diagramme commutatif suivant (en traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[rr, "d_M^{n-1}"] \arrow[dr, "i^{n-1}"] \arrow[dd, "f^{n-1}"'] & & M^n \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[dd, "f^n"] \\
& L^{n-1} \arrow[r, dashed, "d_\alpha"'] \arrow[dl, "j^{n-1}"] & L_\alpha \arrow[dr, "in_\alpha"] \\
N^{n-1} \arrow[rr, "d_N^{n-1}"'] & & N^n
\end{tikzcd}$$

Pour α assez grand il existe une application d_α vérifiant $in_\alpha \circ d_\alpha = d_N^{n-1} \circ j^{n-1}$ car L^{n-1} est libre de type fini. Cette application vérifie aussi les égalités

$$in_\alpha \circ (i_\alpha \circ d_M^{n-1} - d_\alpha \circ i^{n-1}) = 0 \quad , \quad in_\alpha \circ d_\alpha \circ d^{n-2} = 0 \ .$$

On peut donc choisir α assez grand pour que d_α vérifie déjà les égalités

$$i_\alpha \circ d_M^{n-1} - d_\alpha \circ i^{n-1} = 0 \qquad d_\alpha \circ d^{n-2} = 0$$

car M^{n-1} et L^{n-2} sont de type fini. L'indice α étant ainsi choisi, on pose $i_\alpha = i^n$, $in_\alpha = j^n$, $L_\alpha = L^n$, $d_\alpha = d^{n-1}$.

REFERENCES

[C.E.] H. CARTAN et S. EILENBERG.- Homological Algebra (Princeton University Press).

[D] A. DOLD.- Fixed point index and fixed point theorem for E.N.R..- Topology, Vol. 4, pp. 1-8 (1965).

[H] R. HARTSHORNE.- Residues and Duality.- Lectures Notes n° 20 Springer Verlag

D. LAZARD.- C.R.A.S., t. 258, p. 6313.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG
Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966-67

Exposé 10

THEOREME DE BIDUALITE POUR LES FAISCEAUX PARFAITS

(d'après un exposé de G. BARTHEL)

Dans cet exposé B désigne un anneau commutatif à élément unité, $B \to A$ une B-algèbre plate associative à élément unité, X un espace localement compact possèdant la propriété $\Delta(B)$ (2.1. exposé 4) et par suite les propriétés $\Delta(A)$ et $\Delta(A^o)$ (2.2. exposé 4). On note $D({}_AX)$ (resp. $D(X_A)$, resp. $D({}_AX_A)$) la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de A-modules à gauche (resp. à droite, resp. de $A \otimes_B A^o$-modules) sur X.

1. Dual d'un complexe de faisceau.

Soit $A \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_X^\bullet$ une résolution fondamentale de X i.e. (2.1. exposé 4) une résolution finie plate et c-molle du faisceau constant A par des faisceaux de $A \otimes_B A^o$-modules. Soit $A \to I^\bullet$ une résolution de A par des $A \otimes_B A^o$-modules injectifs. Comme A est une B-algèbre plate les composants de $I^\bullet$ sont des A-modules (resp. A^o-modules) injectifs [Appendice 1].

Soit $\mathscr{C}_X^\bullet$ le complexe de faisceaux :

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U,\Omega_X^\bullet), I^\bullet)$$

C'est un complexe de faisceaux de $A \otimes_B A^o$-modules injectifs (exposé 4). Le complexe $\mathscr{C}_X^\bullet$ est canoniquement isomorphe, dans $D({}_AX_A)$ au complexe $\pi^!(A)$ où $\pi : X \to e$ est l'application canonique de X sur un point et où $\pi^! : D^+(A \otimes_B A^o\text{-Mod}) \to D^+({}_AX_A)$ est le foncteur adjoint au foncteur $R^+\pi_! : D^+({}_AX_A) \to D^+(A \otimes_B A^o\text{-Mod})$ (exposé 4). Comme $I^\bullet$ est une résolution in-

jective de A-modules (resp. A^o-modules) le complexe $\mathcal{C}_X^{\bullet}$ est canoniquement isomorphe dans $D({}_AX)$ (resp. $D(X_A)$) à $\pi^!(A)$ où $\pi^!$ désigne cette fois le foncteur adjoint au foncteur $R^+\pi_! : D^+({}_AX) \to D^+(A\text{-mod})$ (resp. ...) .

Pour tout complexe F de faisceaux de A-modules (resp. de A^o-modules) on pose :

1.1.
$$D_gF = \mathcal{H}om_A^{\bullet}(F, \mathcal{C}_X^{\bullet})$$
$$(\text{resp. } D_dF = \mathcal{H}om_{A^o}^{\bullet}(F, \mathcal{C}_X^{\bullet}))$$

On supprime les indices g et d lorsqu'aucune confusion n'en résulte. Les foncteurs $F \mapsto DF$ définis ici sur les catégories de complexes à homotopies près passent aux catégories dérivées et fournissent deux foncteurs de $D({}_AX)$ dans $D(X_A)$ et de $D(X_A)$ dans $D({}_AX)$ respectivement :

1.2.
$$\begin{cases} D_gF = R\,\mathcal{H}om_A(F,\pi^!A) \\ D_dF = R\,\mathcal{H}om_{A^o}(F,\pi^!A) \end{cases}$$

On supprime les indices g et d lorsqu'aucune confusion n'en résulte.

1.3. <u>Définition</u> .

<u>Le complexe</u> DF <u>est appelé le dual du complexe</u> F . <u>Le foncteur</u> $F \mapsto DF$ <u>est appelé le foncteur dualisant</u> (<u>à droite où à gauche lorsqu'il faut préciser</u>) .

1.4. <u>Proposition</u> .

Soit $f : X \to Y$ une application continue dans un espace localement compact Y possédant la propriété $\Delta(B)$. Désignons par D_X (resp. D_Y) le foncteur dualisant à gauche de X (resp. de Y). Pour tout objet G de $D^-({}_AY)$; il existe un isomorphisme fonctoriel :

1.4.1.
$$f^!D_YG \simeq D_Xf^*G \quad .$$

Pour tout objet F de $D^-({}_A X)$ il existe un isomorphisme fonctoriel :

1.4.2. $$Rf_* D_X F \simeq D_Y Rf_! F \quad .$$

Lorsque le foncteur image directe par f est de dimension cohomologique finie, l'isomorphisme 1.4.2. se prolonge en un isomorphisme défini pour tout objet F de $D({}_A X)$.

On a des énoncés analogues pour les foncteurs dualisants à droite.

<u>Preuve</u> : Soit $\tau : Y \to e$ l'application canonique de Y sur un point. On a un isomorphisme canonique

$$f^! \tau^! A = \pi^! A \ .$$

Les formules 1.4.1. et 1.4.2. peuvent donc se lire

$$f^! R\,\mathcal{H}om(G, \tau^! A) \simeq R\,\mathcal{H}om(f^* G, f^! \tau^! A) \ ,$$

$$Rf_* R\,\mathcal{H}om(F, f^! \tau^! A) \simeq R\,\mathcal{H}om(Rf_! F, \tau^! A) \ .$$

1.5. <u>Corollaire</u> .

<u>Lorsque</u> X <u>est paracompact, on a, pour tout objet</u> F <u>de</u> $D({}_A X)$ <u>des isomorphismes canoniques</u> :

$$\mathrm{Ext}^i_A(R\Gamma_c(X,F), A) \simeq H^i(X, DF)$$

C'est un cas particulier de la formule 1.4.2. .

2 . <u>Le théorème de Bidualité</u> .

Désignons par $\mathrm{bid}_g(F) : F \to D_d D_g F$, $F \in \mathrm{ob}D({}_A X)$ (resp. $\mathrm{bid}_d(F) : F \to D_g D_d F$, $F \in \mathrm{ob}D(X_A)$) le morphisme canonique de bidualité et par $D_{\mathrm{parf}}({}_A X)$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(X_A)$) la catégorie des complexes parfaits de faisceaux de A-modules (resp. de A^o-modules) [Exposé 9] .

2.1. Théorème .

Soit $F \in \mathrm{ob}\, D^b({}_A X)$ (resp. $\mathrm{ob}\, D^b(X_A)$) un complexe parfait .

1) Le complexe $D_g F$ (resp. $D_d F$) est parfait .

2) Le morphisme de bidualité

$$\mathrm{bid}_g(F) : F \to D_d D_g F$$

$$(\text{resp. } \mathrm{bid}_d(F) : F \to D_g D_d F)$$

est un isomorphisme .

En particulier la restriction du foncteur D_g (resp. D_d) à la catégorie des complexes parfaits établit une antiéquivalence entre $D_{parf}({}_A X)$ et $D_{parf}(X_A)$ (resp. $D_{parf}(X_A)$ et $D_{parf}({}_A X)$) .

2.2. Démonstration de la première assertion du théorème 2.1. .

Nous nous bornerons à démontrer que $D_g(F)$ est parfait. La partie (resp.) de l'assertion s'obtient alors en remplaçant A par A^o .

D'après la définition des complexes parfaits, (Exposé 9), il faut montrer que :

a) DF est un complexe borné d'amplitude plate finie.

b) Pour tout $x \in U$ les systèmes inductifs locaux ;

$$x \in U \longmapsto R\Gamma(U, DF)$$

sont essentiellement parfaits .

Le complexe F étant parfait, est d'amplitude plate finie. Il résulte alors de la formule de projection (Exposé 3) que pour tout ouvert U de X , le complexe $R\Gamma_c(U,F)$ est d'amplitude plate finie contenue dans un intervalle $[m,n]$ indépendant de U .Soient $x \in X$ et U un voisinage ou-

vert de x . Le complexe F étant parfait il existe un voisinage ouvert V de x , $V \subset U$, tel que le morphisme canonique

2.2.1. $$R\Gamma_c(V,F) \longrightarrow R\Gamma_c(U,F)$$

se factorise dans la catégorie dérivée à travers un complexe parfait de A-modules. On en déduit que le morphisme (2.2.1.) se factorise à travers un complexe parfait d'amplitude libre contenue dans $[m,n]$. Par suite pour tout $x \in X$ le pro-objet à valeurs dans $D(A)$:

$$x \in U \longmapsto R\Gamma_c(U,F)$$

est isomorphe à un pro-objet $i \mapsto L_i$ où pour tout i , L_i est un complexe parfait d'amplitude libre contenue dans $[m,n]$ (exposé 6) . Par ailleurs, pour tout ouvert $U \subset X$, on a un isomorphisme canonique, compatible avec les restrictions aux ouverts plus petits (1.4.2.) :

$$R\Gamma(U,DF) \simeq R\mathrm{Hom}_A(R\Gamma_c(U,F),A)$$

Par suite le Ind-objet $U \mapsto R\Gamma(U,DF)$ est isomorphe à un Ind-objet $i \mapsto L_i^*$ où les L_i^* sont des complexes parfaits de A^o-modules d'amplitude libre $c[-n,-m]$. Il en résulte tout d'abord que les systèmes inductifs locaux $x \in U \mapsto R\Gamma(U,DF)$ sont essentiellement parfaits d'où la propriété b). Démontrons a) . Tout d'abord, il résulte de ce qui précède que pour tout $x \in X$, le complexe fibre DF_x est borné d'amplitude cohomologique contenu dans $[-n,-m]$. Par suite DF est un complexe borné. De plus, pour tout A-module M , la formule de projection fournit un isomorphisme pour tout compact $K \subset X$:

$$R\Gamma(K,DF \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} M) \simeq R\Gamma(K,DF) \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} M$$

Comme pour tout point $x \in X$, le Ind-objet

$$x \in K \longmapsto R\Gamma(K,DF)$$

indexé par les voisinages compacts de x , est isomorphe à un Ind-objet $i \mapsto L_i^*$ où les L_i^* sont des complexes parfaits d'amplitude libre contenue dans $[-n,-m]$, le complexe fibre $(DF \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} M)_x$ est d'amplitude cohomologique contenue dans $[-n,-m]$. Par suite le complexe DF est d'amplitude plate finie .

2.3. Remarque .

Soient $[m,n]$ l'amplitude plate de F , p la A-dimension cohomologique de X . La démonstration précédente montre que l'amplitude plate de DF est contenue dans $[-(n+p),-m]$.

2.4. Démonstration de la deuxième assertion du théorème 2.1. .

Nous nous bornerons à démontrer que $\mathrm{bid}_g(F)$ est un isomorphisme. La partie (resp.) de l'assertion s'obtient alors en changeant A en A^o . Soient F un objet de $D^-({}_AX)$ (non nécessairement parfait), U un ouvert paracompact de X , K un compact de X , $k \subset U$. On a alors quatre morphismes canoniques :

$$2.4.1. \quad \begin{cases} \delta_U : R\Gamma(U,DDF) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(U,F),A) \\ \delta_K : R\Gamma_K(U,DF) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F),A) \\ \rho_{U,K} : R\Gamma(U,F) \longrightarrow R\Gamma(K,F) \\ i_{K,U} : R\Gamma_K(U,DF) \longrightarrow R\Gamma_c(U,DF) \end{cases}$$

L'isomorphisme δ_U est défini comme suit : l'ouvert U étant paracompact, le foncteur "sections sur U" est de dimension cohomologique finie et est par suite dérivable en l'objet DDF (qui est un complexe non nécessairement borné inférieurement). De plus on a un isomorphisme

$$R\Gamma(U,DDF) \simeq \mathrm{RHom}(U,DF,\pi^!A) .$$

Le théorème de dualité fournit alors un isomorphisme

$$\mathrm{RHom}(U,DF,\pi^!A) \simeq \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(U,DF),A) .$$

L'isomorphisme δ_U est alors l'isomorphisme composé.

L'isomorphisme δ_K est défini comme suit : le foncteur "sections à support dans K" est dérivable en DF (qui est un objet de $D^+(X_A)$) . De plus, on a un isomorphisme

$$R\Gamma_K(U,DF) \simeq \mathrm{RHom}(F \otimes_B B_K, \pi^!A) .$$

Le théorème de dualité fournit alors un isomorphisme :

$$\mathrm{RHom}(F \underset{B}{\otimes} B_K, \pi^! A) \simeq \mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F),A) \ .$$

L'isomorphisme δ_K est alors l'isomorphisme composé .

Le morphisme $\rho_{U,K}$ est le morphisme de restriction des sections. Le morphisme $i_{K,U}$ provient de l'injection des sections à supports dans K dans les sections à supports compacts contenus dans U .

Les morphismes 2.4.1. permettent alors de construire un diagramme :

2.4.2.

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma(U,DDF) \arrow[r, "\delta_U", "\sim"'] & \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(U,DF),A) \arrow[r, "\mathrm{RHom}(i_{K,U},A)"] & \mathrm{RHom}(R\Gamma_K(U,DF),A) & \mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F),A),A) \arrow[l, "\mathrm{RHom}(\delta_K,A)"', "\sim"] \\
R\Gamma(U,F) \arrow[u, "R\Gamma(U,\mathrm{bid}(F))"] \arrow[rrr, "\rho_{U,K}"] & & & R\Gamma(K,F) \arrow[u, "\mathrm{bid}(R\Gamma(K,F))"']
\end{tikzcd}$$

2.4.3. <u>Lemme</u> .

Le diagramme 2.4.2. est commutatif .

La preuve du lemme est reporté au prochain alinéa. Montrons que le lemme 2.4.3. entraine l'assertion 2) du théorème 2.1. . Soit F un complexe parfait. Il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, les morphismes $R\Gamma(U,\mathrm{bid}(F))$ induisent un isomorphisme du Ind-objet .

$$x \in U \text{ ouvert paracompact} \longmapsto R\Gamma(U,F) \ ,$$

sur le Ind-objet

$$x \in U \text{ ouvert paracompact} \longmapsto R\Gamma(U,DDF) \ .$$

Mais le diagramme 2.4.2. fait apparaître six Ind-objets de $D(A)$:

$$x \in U \text{ ouvert paracompact} \longmapsto R\Gamma(U,F) ,$$

$$x \in U \text{ ouvert paracompact} \longmapsto R\Gamma(U,DDF) ,$$

$$x \in U \text{ ouvert paracompact} \longmapsto RHom(R\Gamma_c(U,DF),A) ,$$

$$x \in K \text{ voisinage compact} \longmapsto RHom(R\Gamma_K(U,DF),A) ,$$

$$x \in K \text{ voisinage compact} \longmapsto RHom(RHom(R\Gamma(K,F),A),A) ,$$

$$x \in K \text{ voisinage compact} \longmapsto R\Gamma(K,F) .$$

De plus les morphismes du diagramme 2.4.2. définissent six morphismes, des Ind-objets correspondants et la commutativité du diagramme 2.4.2. entraîne la commutativité du diagramme de Ind-objets correspondant. Il est clair que les isomorphismes δ_U et $RHom(\delta_K,A)$ définissent des isomorphismes de Ind-objets et on vérifie immédiatement que les morphismes $\rho(U,K)$ et $RHom(i_{K,U},A)$ définissent des isomorphismes de Ind-objets. Le Ind-objet $x \in K \mapsto R\Gamma(K,F)$ étant essentiellement parfait, le morphisme de Ind-objets défini par les morphismes de bidualités $bid(R\Gamma(K,F))$ est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme de Ind-objets défini par les morphismes $R\Gamma(U,bid(F))$ est un isomorphisme. q.e.d.

2.5. Démonstration du lemme 2.4.3.

Soit $F^\bullet$ un complexe c-mou borné supérieurement de faisceaux de A-modules. Tout complexe borné supérieurement est quasi isomorphe à un tel complexe.

a) Le morphisme $Bid(F^\bullet) : F^\bullet \to \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X), \mathcal{C}^\bullet_X)$ est défini de la manière évidente. Soit U un ouvert de X et

$$Bid(F^\bullet)(U) : \Gamma(U,F^\bullet) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X), \mathcal{C}^\bullet_X))$$

le morphisme déterminé par $Bid(F^\bullet)$. Soient V un ouvert, $V \subset U$, r un entier, $f^n \in \Gamma(U,F^n)$, $\sigma^{(r)} = (\sigma^q_p) \in \prod_{q-p=r} Hom(V;F^p, \mathcal{C}^q)$. Le morphisme $Bid(F^\bullet)(U)$ est déterminé par les relations :

2.5.1. $$\mathrm{Bid}(F^\bullet)(U)(f^n,\sigma^{(r)}) = (-1)^{\frac{(n+r)(n+r+1)}{2}}\ \sigma_n^{r+n}\ (f^n/V)\ .$$

L'image de $\mathrm{Bid}(F^\bullet)$ dans $D({}_AX)$ est, par définition, le morphisme de bidualité. Comme U est paracompact de B-dimension topologique finie, $\Gamma(U,F)$ est canoniquement isomorphe dans $D({}_AX)$ à $R\Gamma(U,F)$. Le complexe $\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet)$ est canoniquement isomorphe dans la catégorie dérivée à DDF (1.1.) . Comme $\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet)$ est un complexe de faisceaux flasques, $\Gamma(U,\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet)$ est canoniquement isomorphe dans $D(A)$ à $R\Gamma(U,DDF)$.

<u>Par suite, l'image dans la catégorie</u> $D(A)$ <u>du morphisme</u> $\mathrm{Bid}(F^\bullet)(U)$ <u>défini par les relations 2.5.1. est canoniquement isomorphe à</u> $R\Gamma(U,\mathrm{bid}(F^\bullet))$.

b) L'image dans la catégorie $D(A)$ de l'isomorphisme

2.5.2. $$\Gamma(U,\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet)) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(U^\bullet,\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet)$$

est, à isomorphisme canonique près

$$R\Gamma(U,DDF) \simeq R\mathrm{Hom}^\bullet(U^\bullet,DF,\pi^!A)\ .$$

Avec les notations de 4.5.7. exp. 4 , désignons par

$$M(\Pi/U,I^\bullet,\Omega_X^\bullet)\ :\ \Gamma_c(U,\mathcal{C}_X^\bullet) \longrightarrow I^\bullet$$

le morphisme d'adjonction. Comme le complexe $F^\bullet$ est c-mou, il résulte de la proposition 4.8. exposé 4 que le morphisme composé

2.5.3.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^\bullet(U,\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),\mathcal{C}_X^\bullet) \arrow[r, "Fl^\bullet(\Gamma_c(U,?))"] & \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U,\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet)),\Gamma_c(U,\mathcal{C}_X^\bullet)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U,\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet,\mathcal{C}_X^\bullet),I) & \arrow[l, "\text{"composition avec } M(\Pi/U,I^\bullet,\Omega_X^\bullet)\text{"}"']
\end{tikzcd}$$

est canoniquement isomorphe, dans la catégorie $D(A)$, à l'isomorphisme de dualité :

$$\mathrm{RHom}(U, DF, \pi^! A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(U, DF), A) .$$

Le composant de degré n du complexe $\Gamma(U, \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}_X^\bullet), \mathcal{C}_X^\bullet))$ est :

$$\prod_r \mathrm{Hom}(U ; \prod_{q-p=r} \mathcal{H}om(F^p, \mathcal{C}_X^q), \mathcal{C}_X^{n+r}) .$$

Un élément de ce A-module est donc défini par une famille

$$(\beta_r)_{r \in \mathbb{Z}} \quad , \quad \beta_r \in \mathrm{Hom}(U, \prod_{q-p=r} \mathcal{H}om(F^p, \mathcal{C}_X^q), \mathcal{C}_X^{n+r}) ,$$

où pour tout ouvert $V \subset U$,

$$\beta_r(V) \in \mathrm{Hom}(\prod_{q-p=r} \mathrm{Hom}(V, F^p, \mathcal{C}_X^q), \mathcal{C}_X^{n+r})$$

associe à tout élément

$$\sigma^{(r)} = (\sigma_p^q)_{q-p=r} \quad ; \quad \sigma_p^q \in \mathrm{Hom}(V ; F^p, \mathcal{C}_X^q)$$

un élément

$$\beta_r(V)(\sigma^{(r)}) \in \mathcal{C}_X^{n+r}(V) .$$

Le composant de degré n du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_c(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}_X^\bullet), I^\bullet)$ est

$$\prod_r \mathrm{Hom}(\Gamma_c(U, \mathcal{H}om^r(F^\bullet, \mathcal{C}_X^\bullet)), I^{n+r}) .$$

Un élément de ce complexe est donc une famille

$$(\beta'_r)_{r \in \mathbb{Z}} \quad , \quad \beta'_r \in \mathrm{Hom}(\Gamma_c(U, \mathcal{H}om^r(F^\bullet, \mathcal{C}_X^\bullet)), I^{n+r}) ,$$

où β'_r associe à toute famille

$$\tau^{(r)} = (\tau_p^q) \in \prod_{q-p=r} \mathrm{Hom}(U, F^p, \mathcal{C}_X^q) ,$$

où les supports des τ_p^q sont contenus dans un compact fixe de U indépendant de (p,q), un élément

$$\beta'_r(\tau^{(r)}) \in I^{n+r} .$$

Le composé des morphismes 2.5.2. et 2.5.3. est donc le morphisme

$$(\beta_r)_{r\in\mathbb{Z}} \longmapsto (\beta'_r)_{r\in\mathbb{Z}} \quad ,$$

où pour tout $r \in \mathbb{Z}$:

2.5.4. $$\beta'_r(\tau^{(r)}) = M^{n+r}(\Pi/U, I^\bullet, \Omega^\bullet_X) \circ \beta_r(U)(\tau^{(r)}) \ .$$

Il résulte alors de ce qui précède que <u>le morphisme</u> δ_U <u>du diagramme 2.5.1. est canoniquement isomorphe, dans la catégorie</u> $D(A)$ <u>au morphisme déterminé par les relations 2.5.4.</u> .

c) Comme le complexe $\mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X)$ est flasque, pour tout compact $K \subset U$, le complexe $\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X))$ est canoniquement isomorphe, dans la catégorie $D(A)$, au complexe $R\Gamma_K(U,DF)$. De plus, le morphisme d'inclusion

$$\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X)) \longrightarrow \Gamma_c(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X))$$

n'est autre que le morphisme

$$i(K,U) : R\Gamma_K(U,DF) \longrightarrow R\Gamma_c(U,DF) \ .$$

d) Soit $\tau^{(r)} = (\tau^q_p) \in \prod_{q-p=r} \mathrm{Hom}(U, F^p, \mathcal{C}^q_X)$, une famille de morphismes à supports dans K . <u>Il résulte de a), b) et c) que le morphisme de complexes</u> :

2.5.5. $$\Gamma(U,F^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X)), I^\bullet) \ ,$$

<u>qui associe à tout élément</u> $f^n \in \Gamma(U,F^n)$ <u>la famille</u>

$$(\beta''_r) \in \prod_r \mathrm{Hom}(\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^r(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X), I^{n+r})$$

<u>déterminée par les relations</u> :

2.5.6. $$\beta''_r(\tau^{(r)}) = (-1)^{\frac{(n+r)(n+r+1)}{2}} M^{n+r}(\Pi/U, I^\bullet, \Omega^\bullet_X) \circ \tau^{n+r}_n(f^n)$$

<u>est canoniquement isomorphe, dans la catégorie</u> $D(A)$, <u>au morphisme composé</u> :

$$R\Gamma(U,DF) \xrightarrow{R\Gamma(U,\mathrm{bid}(F))} R\Gamma(U,DDF) \xrightarrow{\delta_U} \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(U,DF),A) \xrightarrow{\mathrm{RHom}(i_{K,U},A)} \mathrm{RHom}(R\Gamma_K(U,DF),A)$$

e) Le complexe $F^\bullet$ étant c-mou, le complexe $\Gamma(K,F^\bullet)$ est canoniquement isomorphe dans $D(A)$ au complexe $R\Gamma(K,F^\bullet)$, et le morphisme de restriction

$$\Gamma(U,F^\bullet) \longrightarrow \Gamma(K,F^\bullet)$$

n'est autre que le morphisme $\rho_{U,K} : R\Gamma(U,F^\bullet) \to R\Gamma(K,F^\bullet)$.

f) Comme le complexe $I^\bullet$ est injectif, le complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet),I^\bullet)I^\bullet)$ est canoniquement isomorphe dans $D(A)$, au complexe $\mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^\bullet),A),A)$. Un élément de degré n du complexe $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet),I^\bullet),I^\bullet)$ est une famille :

$$(\varphi_r)_{r\in\mathbb{Z}} \in \prod_r \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}^r(\Gamma(K,F^\bullet),I^\bullet),I^{n+r}) ,$$

où pour tout $r \in \mathbb{Z}$, φ_r associe à la famille

$$\tau''^{(r)} = (\tau''^q_p) \in \prod_{q-p=r} \mathrm{Hom}(\Gamma(K,F^p),I^q)$$

un élément

$$\varphi_r(\tau''^{(r)}) \in I^{n+r} .$$

<u>Il résulte alors de e) que le morphisme de complexes</u>

$$\Gamma(U,F^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet),I^\bullet),I)$$

<u>qui associe à tout élément</u> $f^n \in \Gamma(U,F^n)$ <u>la famille</u> $(\varphi_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ <u>déterminé par les relations</u>

2.5.7. $$\varphi_r(\tau''^{(r)}) = (-1)^{\frac{(n+r)(n+r+1)}{2}} \tau''^{n+r}_n(f^n/K)$$

<u>est canoniquement isomorphe, dans</u> $D(A)$, <u>au morphisme composé</u> :

$$R\Gamma(U,F^\bullet) \xrightarrow{\rho_{U,K}} R\Gamma(K,F^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{bid}(R\Gamma(K,F))} \mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^\bullet),A),A) .$$

g) Comme le complexe $\mathcal{C}_X^{\bullet}$ est injectif, le complexe $\mathrm{Hom}^{\bullet}(F^{\bullet} \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{\bullet})$ est canoniquement isomorphe, dans $D(A)$, au complexe $R\mathrm{Hom}(F^{\bullet} \underset{B}{\otimes} B_K, \Pi^! A)$.

Un élément de degré n du complexe $\mathrm{Hom}^{\bullet}(F^{\bullet} \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{\bullet})$ est une famille

$$\tau'^{(n)} = (\tau'^{n+r}_r) \in \prod_r \mathrm{Hom}(F^r \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{n+r})$$

où, pour tout ouvert $V \subset U$, τ_r^{n+r} associe à toute section $f'^r \in \Gamma(V \cap K, F^r)$ une section $\tau'^{n+r}_r(V)(f'^r) \in \mathcal{C}_X^{n+r}(V)$. Le morphisme canonique

$$R\Gamma_K(U, R\,\mathcal{H}om(F^{\bullet}, \Pi^! A)) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(F \underset{B}{\otimes} B_K, \Pi^! A) .$$

n'est autre que, dans la catégorie dérivée, le morphisme de complexe

$$\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^{\bullet}(F^{\bullet}, \mathcal{C}_X^{\bullet})) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}(F^{\bullet} \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{\bullet})$$

qui associe à tout élément de degré n, $\tau^{(n)} = (\tau_r^{n+r}) \in \prod_r \mathrm{Hom}(U, F^r, \mathcal{C}_X^{n+r})$ où les τ_r^{n+r} sont à supports dans K, la famille des $\tau'^{(n)} = (\tau'^{n+r}_r)$ où, pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$ et pour tout ouvert $V \subset U$, τ'^{n+r}_r est déterminé par la relation

2.5.8. $$\tau'^{n+r}_r(V)(f'^r) = \tau_r^{n+r}(V)(f'^r)$$

où l'on remarquera que pour donner un sens au deuxième membre il faut utiliser le fait que τ_r^{n+r} est à support dans K.

Comme le complexe F est c-mou, il résulte de la proposition 4.8., exposé 4, que le morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(F^{\bullet} \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}(\Gamma(K, F^{\bullet}), I) .$$

qui à tout élément de degré n, $\tau'^{(n)} = (\tau'^{n+r}_r) \in \prod_r \mathrm{Hom}(F^r \underset{B}{\otimes} B_K, \mathcal{C}_X^{n+r})$ associe l'élément $\tau''^{(n)} = (\tau''^{n+r}_r) \in \prod_r \mathrm{Hom}(\Gamma(K, F^r), I^{n+r})$, déterminé par les relations

2.5.9. $$\tau''^{n+r}_r(f^r) = M^{n+r}(\Pi/U, I^\bullet, \Omega^\bullet_X) \circ \tau'^{n+r}_r(f^r) \quad ,$$

est canoniquement isomorphe dans $D(A)$ au morphisme de dualité

$$\mathrm{RHom}(F^\bullet \otimes_B B_K, \Pi^! A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F),A)$$

<u>Il résulte alors de 2.5.8. et 2.5.9. que le morphisme de complexes</u>

$$\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet), I^\bullet)$$

<u>qui à un élément de degré</u> n , $\tau^{(n)}$ <u>associe l'élément</u> $\tau''^{(n)} = (\tau''^{n+r}_r)$ <u>déterminé par les relations</u>

2.5.10. $$\tau''^{n+r}_r = M^{n+r}(\Pi/U, I^\bullet, \Omega^\bullet_X) \circ \tau^{n+r}_r$$

<u>est canoniquement isomorphe dans</u> $D(A)$ <u>au morphisme</u>

$$\delta_K : R\Gamma_K(U, R\,\mathcal{H}om(F^\bullet, \Pi^! A)) \longrightarrow \mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^\bullet),A) \ .$$

h) Comme $I^\bullet$ est un complexe injectif, les complexes $\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X)), I^\bullet)$ et $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet), I^\bullet), I^\bullet)$ sont canoniquement isomorphes dans $D(A)$ aux complexes $\mathrm{RHom}(R\Gamma_K(U, R\,\mathcal{H}om(F^\bullet, \Pi^! A), A)$ et $\mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^\bullet),A),A)$ respectivement.

En utilisant les notations de f) et de d) et la formule 2.5.10., on voit que le morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma(K,F^\bullet), I^\bullet), I^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet(\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^\bullet(F^\bullet, \mathcal{C}^\bullet_X), I^\bullet)$$

qui associe en degré n à tout élément $(\varphi_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ l'élément $(\beta''_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ déterminé par les relations :

2.5.11. $$\beta''_r(\tau^{(r)}) = \varphi_r(M^{n+r}(\Pi/U, I^\bullet, \Omega^\bullet_X) \circ \tau^{(r)}) \ ,$$

est canoniquement isomorphe, dans $D(A)$, au morphisme

$$\mathrm{RHom}(\delta_K, A) : \mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^\bullet),A),A) \to \mathrm{RHom}(R\Gamma_K(U, R\,\mathcal{H}om(F^\bullet, \Pi^! A), A) \ .$$

Par suite, en combinant 2.5.11. et 2.5.7. , on voit que <u>le morphisme de complexes</u>

$$\Gamma(U,F^{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}(\Gamma_K(U, \mathcal{H}om^{\bullet}(F^{\bullet}, \mathcal{C}_X^{\bullet})), I^{\bullet})$$

<u>qui associe à tout</u> $f^n \in \Gamma(U,F^n)$ <u>l'élément</u> $(\beta''_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ <u>déterminé par les relations</u>

2.5.12. $$\beta''_r(\tau^{(r)}) = (-1)^{\frac{(n+r)(n+r+1)}{2}} M^{n+r}(\Pi/U, I^{\bullet}, \Omega_X^{\bullet}) \circ \tau_n^{n+r}(f^n)$$

<u>est canoniquement isomorphe, dans</u> $D(A)$, <u>au morphisme composé</u>

$$R\Gamma(U,F^{\bullet}) \xrightarrow{\rho_{U,K}} R\Gamma(K,F^{\bullet}) \xrightarrow{\mathrm{bid}(R\Gamma(K,F^{\bullet}))} \mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(R\Gamma(K,F^{\bullet}),A),A) \xrightarrow{\mathrm{RHom}(\delta_K,A)} \mathrm{RHom}(R\Gamma_K(U,DF^{\bullet}),A).$$

La comparaison des formules 2.5.12. et 2.5.6. montre alors que le diagramme 2.4.2. est commutatif .

2.6. <u>Corollaire</u> .

<u>Soit</u> F <u>un complexe parfait de faisceaux de</u> A-<u>modules sur</u> X . <u>Il existe un isomorphisme</u>

$$R\Gamma(X,F) \simeq \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(X,DF),A)$$

<u>Preuve</u> . C'est le théorème de dualité appliqué au complexe DF combiné avec le théorème de bidualité .

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966-67

Appendice n° 1

PRODUIT TENSORIEL TOTAL

Soit X un espace topologique. La lettre A désigne une algèbre unitaire sur un anneau commutatif Λ. Par ${}_AX$ (resp. X_A) on représente la catégorie des faisceaux de A-module à gauche (resp. à droite) sur X.

On rappelle qu'un faisceau est dit A-plat si ses fibres sont A-plates.

1. Définition du foncteur $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A$ (Left derived functor of $\otimes$)

Soient $F^\bullet$ un complexe de faisceaux de A-modules à droite et $G^\bullet$ un complexe de faisceaux de A-modules à gauche. On sait que le produit tensoriel $F^\bullet \otimes G^\bullet$ est le complexe qui, en degré n, est donné par la formule

$$(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet)^n = \coprod_{p+q=n} F^p \underset{A}{\otimes} G^q .$$

Sur le sommande $F^p \underset{A}{\otimes} G^q$, la différentielle d^n est définie par

$$d^n = d_F^p \otimes 1 + (-1)^p \, 1 \otimes d_G^q .$$

Le complexe $F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet$ est donc un complexe de Λ-biModules. Soit $K^\bullet$ un complexe de faisceaux de Λ-Modules. On se propose de définir un <u>isomorphisme naturel</u> de complexes de Λ-modules, fonctoriel en $F^\bullet, G^\bullet, K^\bullet$:

$$(1) \qquad \mu(F,G,K) : \mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet, K^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_A(F^\bullet, \mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(G^\bullet, K^\bullet)) .$$

Pour ce faire, soit

$$(2) \qquad \mu(F^p,G^q,K^r) : \mathrm{Hom}_\Lambda(F^p \underset{A}{\otimes} G^q,K^r) \simeq \mathrm{Hom}_A(F^p, \mathcal{H}om_\Lambda(G^q,K^r))$$

l'isomorphisme naturel d'adjonction bien connu ; un élément f de $\mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet,K^\bullet)$ est une famille $(f^{p,q,r})_{p,q,r\in\mathbb{Z}}$ où $f^{p,q,r}$ est un élé- de $\mathrm{Hom}_\Lambda(F^p \underset{A}{\otimes} G^q,K^r)$.

De même, un élément de $\mathrm{Hom}^\bullet_A(F^\bullet, \mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(G^\bullet,K^\bullet))$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Hom}(F^p, \mathcal{H}om_\Lambda\, G^q,K^r)$. On pose alors

$$\mu(F^\bullet,G^\bullet,K^\bullet)(f)^{p,q,r} = \mu(F^p,G^q,K^r)(f^{p,q,r}) \quad ,$$

et $\mu(F^\bullet,G^\bullet,K^\bullet)$ est un isomorphisme de complexes lorsque l'on définit sur $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet,Y^\bullet)$ la différentielle par la formule $d^n f = (d^{p+n}f^p + (-1)^{n+1}f^{p+1}d^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ lorsque $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est un élément de degré n . (<u>Attention</u> ce n'est pas la différentielle utilisée dans [H] !) .

1.1. <u>Lemme</u> .

<u>Soient</u> $F^\bullet$ <u>un complexe acyclique de faisceaux de</u> A-<u>Modules à droite</u>, $P^\bullet$ <u>un complexe limité à droite de faisceaux de</u> A-<u>modules à gauche</u> A-<u>plats</u>. <u>Dans ces conditions, le complexe</u> $F^\bullet \underset{A}{\otimes} P^\bullet$ <u>est acyclique</u> .

<u>Démonstration</u> : Soit $K^\bullet$ un complexe de $I^+(\underline{X}_\Lambda)$. En chaque degré $\mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(P^\bullet,K^\bullet)$ est une somme directe finie de faisceau du type $\mathcal{H}om_\Lambda(P^q,K^r)$; puisque P^q est A-plat et que K^r est Λ-injectif, ce dernier faisceau est A-injectif (appliquer la formule d'adjonction (2)). Le complexe $\mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(P^\bullet,K^\bullet)$ est donc un objet de $I^+(\underline{X}_A)$. Il résulte de [H] chap. I, lemme 6.2 que $\mathrm{Hom}^\bullet_A(F^\bullet, \mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(G^\bullet,K^\bullet))$ est acyclique. Appliquons donc l'isomorphisme (1) : nous voyons que le complexe $\mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet,K^\bullet)$ est acyclique pour tout $K^\bullet \in \mathcal{O}b\, I^\bullet(X_\Lambda)$. En particulier soit $K^\bullet$ un complexe nul en chaque degré non nul ; on a $0 = H^n\mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet,K^\bullet) = \mathrm{Hom}_\Lambda(H^{-n}(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet),K^0)$. Prenons pour K^0

un Λ-Module injectif tel qu'il existe un monomorphisme $H^{-n}(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet) \to K^o$.
Il résulte de notre égalité que $H^{-n}(F^\bullet \underset{A}{\otimes} G^\bullet)$ est nul pour tout n.

1.2. On peut donc (confer [H] chap. I, théorème 5.1.) dériver à gauche le foncteur $F^\bullet \otimes ? : K({}_A X) \to K({}_\Lambda X)$. On désigne ce nouveau foncteur par $F^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} ? : D^-({}_A X) \to D({}_\Lambda X)$. Il est clair que l'on définit un foncteur

$$K(X_A) \times D^-({}_A X) \to D({}_\Lambda X)$$

en posant

$$F^\bullet, G^\bullet \mapsto F^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet \quad .$$

D'après le lemme 1.1., ce foncteur transforme quasi-isomorphismes de l'argument $F^\bullet$ en isomorphismes, il induit donc un foncteur noté encore $\overset{\mathbb{L}}{\otimes} : D(X_A) \times D^-({}_A X) \to D({}_\Lambda X)$. On définit de même un foncteur $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}' : D^-(X_A) \times D({}_A X) \to D({}_\Lambda X)$. Les restrictions à $D^-(X_A) \times D^-({}_A X)$ de ces deux foncteurs sont isomorphes.

1.3. <u>Proposition</u>.

<u>Il existe des isomorphismes trifonctoriels</u>

$$R\mathrm{Hom}_\Lambda(F^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet, H^\bullet) \longrightarrow R\mathrm{Hom}_A(F^\bullet, R\mathcal{H}om_\Lambda(G,H))$$

$$R\mathcal{H}om_\Lambda(F \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet, H^\bullet) \longrightarrow R\mathcal{H}om_A(F^\bullet, R\mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(G,H))$$

$$(F \in \mathcal{O}b\, D(X_A) \quad , \quad G \in \mathcal{O}b\, D^-({}_A X) \quad , \quad H \in \mathcal{O}b\, D^+(X_\Lambda))$$

<u>Démonstration</u> : résulte essentiellement de la formule d'adjonction (1) et du fait déjà rencontré dans (1,1) que $\mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(G,H)$ est un objet de $I^+(\underline{X}_A)$ si $G \in \mathcal{O}b\, D^-({}_A X)$ est un complexe de Modules plats et $H \in \mathcal{O}b\, D^+(X_\Lambda)$ un complexe de Modules injectifs.

1.4. Considérons maintenant la situation $F \in \mathcal{O}b(X_\Lambda)$, $G \in \mathcal{O}b({}_A X)$ $H \in \mathcal{O}b({}_A X)$. On vérifie sans peine que la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(F, \mathrm{Hom}_\Lambda(G,H)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(F \underset{\Lambda}{\otimes} G, H)$$

induit la formule

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(F, \mathcal{H}om_A(G,H)) \simeq \mathrm{Hom}_A(F \underset{\Lambda}{\otimes} G, H)$$

où la structure de A-Module à gauche de $F \underset{\Lambda}{\otimes} G$ est induite par celle de G . Il en résulte encore que si H est A-injectif et si G considéré comme Λ-Module est Λ plat, alors $\mathrm{Hom}_A(G,H)$ est Λ-injectif. On en déduit les formules d'adjonctions suivantes :

<u>Proposition</u> .

<u>Dans la situation</u> $F^\bullet \in \mathcal{O}b\, D(X_\Lambda)$, $G^\bullet \in \mathcal{O}b\, D^-({}_A X)$, $H^\bullet \in \mathcal{O}b\, D^+({}_A X)$, <u>il existe des isomorphismes trifonctoriels</u>

$$R\mathrm{Hom}^\bullet_\Lambda(F^\bullet, R\mathcal{H}om^\bullet_A(G^\bullet, H^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}^\bullet_A(F^\bullet \underset{\Lambda}{\otimes} G^\bullet, H^\bullet)$$

$$R\mathcal{H}om^\bullet_\Lambda(F^\bullet, R\mathcal{H}om^\bullet_A(G^\bullet, H^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om^\bullet_A(F^\bullet \underset{\Lambda}{\otimes} G^\bullet, H^\bullet) .$$

<u>lorsque</u> A <u>est un</u> Λ-<u>Module</u> Λ-<u>plat</u> .

En effet tout A-Module est alors le quotient d'un A-Module Λ-plat car, en vertu de l'isomorphisme

$$M \underset{\Lambda}{\otimes} G \simeq (M \underset{\Lambda}{\otimes} A) \underset{A}{\otimes} G$$

et du fait que A est Λ-plat, tout Module A-plat est automatiquement Λ-plat .

2. <u>On suppose dans ce paragraphe que l'anneau</u> A <u>est plat sur</u> Λ. On désigne par A^* l'anneau opposé de A. Il résulte de [CE], chap. IX, § 2, que les catégories ${}_A\underline{X}_A$ et $\underline{X}_{A^*\underset{\Lambda}{\otimes} A}$ sont équivalentes. Dans la situation $G \in \mathcal{O}b\, \underline{X}_{A^*\underset{\Lambda}{\otimes} A}$, $M \in \mathcal{O}b\, {}_{A^*}X$, $N \in \mathcal{O}b\, {}_AX$, il existe un isomorphisme trifonctoriel

$$(G \underset{A^*}{\otimes} M) \underset{A}{\otimes} N \xrightarrow{\sim} G \underset{A^*\underset{\Lambda}{\otimes} A}{\otimes} (M \underset{\Lambda}{\otimes} N)$$

qui montre (prendre $N = A$) que si G est $A^* \underset{\Lambda}{\otimes} A$-plat à droite, alors G est A^*-plat à droite, i.e. A-plat à gauche.

2.1. On se propose de définir un foncteur

$$\overset{\mathbb{L}}{\otimes} : D(X_A) \times D^-({}_AX_A) \to D(X_A)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D(X_A) \times D^-({}_AX_A) \arrow[r, "\overset{\mathbb{L}}{\otimes}"] \arrow[d, "id \times O"] & D(X_A) \arrow[d, "O"] \\
D(X_A) \times D^-({}_AX) \arrow[r, "\overset{\mathbb{L}}{\otimes}"] & D(X_\Lambda)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif à isomorphisme fonctoriel près (ou a note O les foncteurs induits par les "foncteurs oublis" qui sont exacts et passent donc aux catégories dérivées). Cette propriété justifie le fait que l'on conserve la même notation $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$ pour désigner ce foncteur. Soit donc $F^\bullet$ un complexe de $K(X_A)$ et $P^\bullet$ un complexe de $D^-({}_AX_A) \simeq D^-(X_{A^*\underset{\Lambda}{\otimes} A})$ qui soit $A^* \underset{\Lambda}{\otimes} A$-plat en chaque degré. Le complexe $F^\bullet \underset{A}{\otimes} P^\bullet$ est acyclique si $F^\bullet$ l'est puisque d'après ce qui précède $P^\bullet$ est A plat à gauche et qu'il est donc loisible d'appliquer le lemme 1.1. . Ce résultat et [H] chap. I, 5.1. montrent immédiatement

qu'on peut dériver le foncteur

$$\underset{A}{\otimes} : X_A \times {}_AX_A \to X_A$$

et obtenir le résultat indiqué.

2.2. Proposition .

Dans la situation $F^\bullet \in \mathcal{O}b\, D(X_A)$, $G^\bullet \in \mathcal{O}b\, D^-({}_AX_A)$ $K \in \mathcal{O}b\, D^+(X_A)$, il existe des isomorphismes trifonctoriels

$$R\mathrm{Hom}_A(F^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet, K^\bullet) \simeq R\mathrm{Hom}_A(F^\bullet, R\mathcal{H}om_A(G^\bullet, K^\bullet))$$

$$R\mathcal{H}om_A(F^\bullet \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet, K^\bullet) \simeq R\mathcal{H}om_A(F^\bullet, R\,\mathcal{H}om_A(G^\bullet, K^\bullet))$$

Démonstration immédiate . Si A est commutatif les isomorphismes précédents sont bien sur ceux de 1.3. .

2.3. Revenons à [CE] chap. IX, § 2 . Dans la situation $M \in \mathcal{O}b(X_{A^*})$, $N \in \mathcal{O}b(X_A)$, $C \in \mathcal{O}b\, {}_AX_A = \mathcal{O}b\, X_{A \underset{\Lambda}{\otimes} A^*}$ on a un isomorphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{A \underset{\Lambda}{\otimes} A^*}(M \underset{\Lambda}{\otimes} N, C) \simeq \mathrm{Hom}_{A^*}(M, \mathrm{Hom}_A(N, C)) \quad .$$

Il en résulte que si C est $A \underset{\Lambda}{\otimes} A^*$ - injectif alors C est A^*-injectif à droite, donc A-injectif à gauche . (faire $N = A$ dans la formule d'adjonction) .

Un raisonnement analogue à celui de 2.1. nous permet de construire un foncteur $R\mathrm{Hom} : D(X_A) \times D^+({}_AX_A) \to D(A)_d$ (catégorie dérivée de celle de A-module à droite) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D(X_A) \times D^+({}_AX_A) \arrow[r, "\mathrm{RHom}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times 0"] & D(A)_d \arrow[d, "0"] \\
D(X_A) \times D^+({}_AX) \arrow[r, "\mathrm{RHom}"] & D(A)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif .

On définirait de même un foncteur $R\mathcal{H}om : D(X_A) \times D^+({}_AX_A) \to D(X_A)$.

[C.E.] H. CARTAN - S. EILENBERG.- Homological Algebra (Princeton University Press) .

[H] R. HARTSHORNE.- Residues and Duality. Lectures Notes n° 20, Springer Verlag .