INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université de Strasbourg

SEMINAIRE HEIDELBERG - STRASBOURG 1966/67

Dualité de Poincaré

Publication I.R.M.A. Strasbourg
N° 3 - Ed. 1969

I.R.M.A.
5, rue R. Descartes
67-Strasbourg

MATH.-SCI.
QA
612.3
D81

1279049

TABLE DES MATIERES

Nom. d pages

Exposé 1 : COHOMOLOGIE A SUPPORT DANS UN FERME 10

Exposé 2 : DIMENSION DES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS 19

Exposé 3 : LE FONCTEUR IMAGE DIRECTE A SUPPORT PROPRE 18

Exposé 4 : THEOREME DE DUALITE POUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS 36

Exposé 5 : LA DUALITE DE POINCARE DANS LE CAS DES VARIETES 13

Exposé 6 : PRO-OBJECTS (AFTER VERDIER (3)) 24

Exposé 7 : DIE SÄTZE VON BOREL-WILDER 12

Exposé 8 : KONSTRUIRBARE GARBEN 13

Exposé 9 : THEOREME DU NOYAU 52

Exposé 10 : THEOREME DE BIDUALITE POUR LES FAISCEAUX PARFAITS 15

Appendice 1 : PRODUIT TENSORIEL TOTAL .....

Exposé 11 : FORMULE DES POINTS FIXES DE LEFSCHETZ DANS LE CAS DIFFERENTIABLE .

Exposé 12 : FORMULE DES POINTS FIXES DE LEFSCHETZ DANS LE CAS GENERAL .

(Ces deux exposés n'ont pas été rédigés)

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
STRASBOURG

Publication I.R.M.A. Strasbourg
N° 3 - Ed. 1969

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Décembre 1966
Exposé 1

COHOMOLOGIE A SUPPORT DANS UN FERME

D'après un exposé de J.-L. VERDIER à Oberwolfach
rédigé par G. BARTHEL

1 . Définitions des foncteurs H^0_K et $\mathcal{H}^0_K$.

Soit Y un espace topologique, A un anneau à élément unité, et Y_A la catégorie des faisceaux de A-modules unitaires à gauche de base Y . Soit K un fermé de Y et A_K son faisceau caractéristique. Pour tout faisceau $F \in \mathrm{Ob}\, Y_A$ on pose

$$H^0_K(Y,F) = \mathrm{Hom}(A_K,F) .$$

On utilise aussi les notations $\Gamma_K(Y,F)$ et $H^0(Y,Y-K;F)$.

K étant fermé, la suite

$$0 \longrightarrow A_{Y-K} \longrightarrow A \longrightarrow A_K \longrightarrow 0$$

est exacte. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(?,F)$ on obtient la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_K,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_{Y-K},F)$$

qui est exacte. Par conséquent $\mathrm{Hom}(A_K,F)$ est le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(A,F) \to \mathrm{Hom}(A_{Y-K},F)$, c'est-à-dire du morphisme de restriction $H^0(Y,F) \to H^0(Y-K,F)$. Les éléments de $H^0_K(Y,F)$ sont donc les sections globales de F à support dans K , ce qui justifie la notation $\Gamma_K(Y,F)$.

Définissons de même un foncteur $\mathcal{H}^0_K$ par la formule

$$\mathcal{H}^0_K F = \mathcal{H}om(A_K,F) .$$

Il est immédiat que l'on a les égalités

$$\Gamma\, \mathcal{H}^0_K F = H^0_K(Y,F)$$

et

$$\mathcal{H}^0_K F(U) = H^0_{K\cap U}(U,F)\ ,$$

autrement dit $\mathcal{H}^0_K F$ est le faisceau

$$U \longmapsto H^0_{K\cap U}(U,F)\ .$$

2 . Propriétés élémentaires des foncteurs H^0_K et $\mathcal{H}^0_K$.

Les propriétés élémentaires des foncteurs définis dans 1 . sont résumées dans les assertions ci-dessous.

2.1. $H^0_K(Y,?)$ est un foncteur covariant, additif, exact à gauche de la catégorie Y_A dans la catégorie des A-modules.

2.2. $\mathcal{H}^0_K$ est un foncteur covariant, additif, exact à gauche de la catégorie Y_A dans elle-même .

2.3. Le foncteur $\mathcal{H}^0_K$ est adjoint à droite au foncteur $?_K$. C'est une conséquence de la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}(F,\ \mathcal{H}om(A_K,G)) = \mathrm{Hom}(F \otimes A_K, G)$$

et de l'isomorphisme entre F_K et $F \otimes A_K$.

2.4. $H^0(Y, \mathcal{H}^0_K ?\ ) = H^0_K(Y,?)$.

2.5. $\mathcal{H}^0_K$ transforme des objets injectifs en objets injectifs (d'après 2.3.).

2.6. $H^0_{K'}(Y, \mathcal{H}^0_K F\ ) = H^0_{K\cap K'}(Y,F)$. Cela résulte de la définition, de 2.3. et de la formule

$$(F_K)_{K'} = F_{K\cap K'}\ .$$

2.7. Si F est un faisceau flasque, la suite

$$0 \longrightarrow H^0_K(Y,F) \longrightarrow H^0(Y,F) \longrightarrow H^0(Y-K,F) \longrightarrow 0$$

est exacte.

3 . Foncteurs dérivés des foncteurs H^0_K et $\mathcal{H}^0_K$.

La catégorie Y_A possède assez d'objets injectifs, par conséquent les foncteurs dérivés droits $R^i H^0_K$ et $R^i \mathcal{H}^0_K$ existent. On les note H^i_K resp. $\mathcal{H}^i_K$, on a d'ailleurs

$$H^i_K(Y,F) = \mathrm{Ext}^i(A_K,F)$$

et

$$\mathcal{H}^i_K F = \mathcal{E}xt^i(A_K,F) \quad .$$

3.1. Proposition .

Pour tout faisceau F , le faisceau $\mathcal{H}^i_K F$ est associé au préfaisceau

$$U \longmapsto H^i_{K\cap U}(U,F) \ .$$

Cela résulte immédiatement des définitions .

3.2. Proposition .

Pour tout faisceau F , la suite

$$0 \to H^0_K(Y,F) \to H^0(Y,F) \to H^0(Y-K,F) \to H^1_K(Y,F) \to H^1(Y,F) \to \ldots .$$

est exacte .

Démonstration :

La suite de faisceaux

$$0 \to A_{Y-K} \to A \to A_K \to 0$$

est exacte. Si on applique le foncteur contravariant exact à gauche $\mathrm{Hom}(?,F)$ on obtient une suite exacte longue de foncteurs dérivés qui donne le résultat

3.3. Proposition .

Les faisceaux $\mathcal{H}^i_K F$ *et* $R^{i-1} i_*(F|Y-K)$ *sont isomorphes pour tout* $i \geq 2$. (i désigne l'inclusion de $Y-K$ dans Y) .

Démonstration :

On a une suite exacte longue de foncteurs dérivés

$$\ldots \longrightarrow R^{i-1}\mathcal{H}om(A,F) \longrightarrow R^{i-1}\mathcal{H}om(A_{Y-K},F) \longrightarrow R^i\mathcal{H}om(A_K,F) \longrightarrow R^i\mathcal{H}om(A,F) \longrightarrow \ldots$$

Le foncteur $\mathcal{H}om(A,?)$ est exact puisque isomorphe au foncteur Id_{Y_A} ; par conséquent on a $R^i\mathcal{H}om(A,?) = 0$ pour $i \geq 1$. La proposition résulte alors de l'isomorphisme entre $\mathcal{H}om(A_{Y-K},F)$ et $i_*(F|Y-K)$.

3.3.1. Corollaire .

On a $(\mathcal{H}^i_K F)_y = \varinjlim_{V \ni y} H^{i-1}(V-V \cap K,F)$ *pour tout point* $y \in Y$ *et pour tout* $i \geq 2$.

En effet, le faisceau associé au préfaisceau

$$V \longmapsto H^{i-1}(V-V \cap K,F)$$

n'est autre que $R^{i-1} i_*(F|Y-K)$.

3.3.2. Corollaire .

Les faisceaux $\mathcal{H}^i_K F$ *sont concentrés sur la frontière de* K *pour* $i \geq 1$ *et sur* K *pour* $i = 0$.

Démonstration :

La première assertion est - pour $i \geq 2$ - une conséquence immédiate de 3.3.1. . Pour terminer la démonstration, on considère la suite exacte

$$0 \to H^0_{K\cap V}(V,F) \to H^0(V,F) \to H^0(V-V\cap K,F) \to H^1_{K\cap V}(V,F) \to H^1(V,F) ,$$

où V est un voisinage ouvert d'un point $y \in Y$. Si y n'appartient pas à K, on peut supposer que V et K sont disjoints, alors $H^i(V,F)$ et $H^i(V-V\cap K,F)$ sont isomorphes, et $H^i_{K\cap V}(V,F)$ est nul. D'autre part, si V est contenu dans K, on a $H^0(V-V\cap K,F) = 0$. Passant à la limite inductive on trouve bien zéro dans le premier cas, dans le deuxième cas on obtient une suite exacte

$$0 \to (\mathcal{H}^1_K F)_y \to \varinjlim_{y\in V} H^1(V,F) ,$$

d'où notre assertion puisque $\varinjlim_{y\in V} H^1(V,F)$ est nulle .

4 . Suites spectrales et passage à la catégorie dérivée .

Bien entendu, quelques formules énoncées dans 2. donnent naissance à de suites spectrales. On a les suites spectrales suivantes (dont nous donnons les termes $E_2^{p,q}$ et l'aboutissement) :

4.1. $$E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q_K F) \Rightarrow H^{p+q}_K(Y,F) .$$

Cela résulte de la formule

$$H^0_K(Y,F) = H^0(Y, \mathcal{H}^0_K F) \qquad (2.4.) ,$$

car $\mathcal{H}^0_K$ transforme des faisceaux injectifs en faisceaux injectifs (2.5.) qui sont bien H^0-acycliques .

4.2. $$\left.\begin{aligned} {}^1E_2^{p,q} &= \mathrm{Ext}^p(F, \mathcal{H}^q_K G) \\ {}^2E_2^{p,q} &= H^p_K(Y, \mathcal{E}xt^q(F,G)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(F_K, G)$$

La première suite spectrale résulte immédiatement de la formule

$$\mathrm{Hom}(F, \mathcal{H}^0_K G) = \mathrm{Hom}(F_K, G) \quad (2.3.) ,$$

car les faisceaux injectifs sont $\mathrm{Hom}(F_K,?)$ -acycliques.

La deuxième suite spectrale résulte des égalités

$$\mathrm{Hom}(F_K,G) = \mathrm{Hom}(F\otimes A_K,G) = \mathrm{Hom}(A_K,\mathcal{H}om(F,G)) = H^0_K(Y,\mathcal{H}om(F,G))$$

et du fait que, si G est injectif, le faisceau $\mathcal{H}om(F,G)$ est flasque quel que soit F .

4.3. $$E_2^{p,q} = H^p_{K'}(Y,\mathcal{H}^q_K F) \Rightarrow H^{p+q}_{K\cap K'}(Y,F)$$

Cela résulte immédiatement de 2.6. .

Dans la catégorie dérivée $D(Y_A)$ on obtient des formules analogues pour les foncteurs dérivés (en sens de la catégorie dérivée) :

4.4. $$R\mathrm{H}_K(Y,F^\cdot) = R\Gamma(Y,R\mathcal{H}_K F^\cdot) \quad ; \quad F^\cdot \in D^+(Y_A) \qquad (2.4. \ ; \ 4.1.)$$

4.5. $$R\mathrm{Hom}(F^\cdot,R\,\mathcal{H}_K G^\cdot) = R\mathrm{Hom}(F_K^\cdot,G^\cdot) = R\mathrm{H}_K(Y,R\,\mathcal{H}om(F^\cdot,G^\cdot))$$

$$F^\cdot \in D^-(Y_A) \ , \ G^\cdot \in D^+(Y_A) \qquad (2.3. \ ; \ 4.2.)$$

4.6. $$R\mathrm{H}_{K'}(Y,R\,\mathcal{H}_K F^\cdot) = R\mathrm{H}_{K\cap K'}(Y,F^\cdot) \ ; \ F^\cdot \in D^+(Y_A) \quad (2.6. \ ; \ 4.3.)$$

A titre d'application démontrons la proposition suivante :

4.7. Proposition .

Soit V un ouvert contenant K , alors l'inclusion $V \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme

$$H^i_K(V,F) \xrightarrow{\approx} H^i_K(Y,F) \ .$$

Cela résulte immédiatement de 3.3.2. et de 4.1. .

5 . Exemples .

5.1. Cohomologie de l'espace $\mathbb{R}^n$ à support dans l'origine .

D'après 3.2. , on a la suite exacte longue

$$0 \to H^0_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A) \to H^0(\mathbb{R}^n,A) \to H^0(\mathbb{R}^n-\{0\},A) \to H^1_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A) \to H^1(\mathbb{R}^n,A) \to \dots$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile quel que soit n , donc les modules $H^i(\mathbb{R}^n,A)$ sont nuls pour $i \geq 1$. Alors la suite exacte donne les résultats suivants : $H^0_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A)$ (resp. $H^1_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A)$) est le noyau (resp. conoyau) du morphisme de restriction

$$H^0(\mathbb{R}^n,A) \to H^0(\mathbb{R}^n - \{0\},A) ,$$

et les modules $H^{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\},A)$ et $H^i_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A)$ sont isomorphes pour $i \geq 2$.

L'espace $\mathbb{R}^0 - \{0\}$ est vide ; par conséquent on a $H^0_{\{0\}}(\mathbb{R}^0,A) = A$ et $H^i_{\{0\}}(\mathbb{R}^0,A) = 0$ pour $i \neq 0$.

Pour $n = 1$ le morphisme $H^0(\mathbb{R},A) \to H^0(\mathbb{R} - \{0\},A)$ est l'application diagonale de A dans $A \oplus A$, dont le noyau est nul et dont le conoyau est égal à A . Pour $n \geq 2$ le morphisme $H^0(\mathbb{R}^n,A) \to H^0(\mathbb{R}^n - \{0\},A)$ est l'identité $A \to A$, donc le noyau et le conoyau sont nuls. Finalement, l'isomorphisme entre $H^i_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A)$ et $H^{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\},A)$ pour $i \geq 2$ donne les égalités suivantes :

$$H^i_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq n \\ A & \text{pour } i = n \end{cases}$$

5.2. Cohomologie de l'espace $\mathbb{R}^n$ à support dans un sous-espace .

Soit $n \geq p$, alors on a

$$H^i_{\mathbb{R}^p}(\mathbb{R}^n,A) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq n-p \\ A & \text{pour } i = n-p \end{cases} .$$

Cela résulte immédiatement du fait que $(\mathbb{R}^{n-p},\{0\})$ est rétract par déformation de $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et de l'application de 5.1. .

5.3. La dimension topologique stricte de l'espace $\mathbb{R}^n$ est égal à $n+1$.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

$$H^{n+1}_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A_U) = A^{\mathbb{N}}/A^{(\mathbb{N})}$$

où U est un ouvert convenable de $\mathbb{R}^n$. (Pour la notion de "dimension topologique stricte" cf. l'exposé 2 de ce séminaire) .

Soit K l'ensemble fermé

$$K = \bigcup_{r=1}^{\infty} S(0,\tfrac{1}{r}) \cup D ,$$

où $S(0,\frac{1}{r})$ désigne la sphère S^{n-1} de centre 0 et de rayon $\frac{1}{r}$ et D une demi-droite fermée d'origine 0 .

Soient U_i l'ouvert de $\mathbb{R}^n - K$ contenu entre $S(0,\frac{1}{i})$ et $S(0,\frac{1}{i+1})$, U_0 la partie ouverte de $\mathbb{R}^n - K$ extérieure à $S(0,1)$ et soit U le complémentaire de K . Alors on a

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$$

et

$$A_U = \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i} .$$

Pour établir le résultat, il faut calculer les modules

$$H^p_{\{0\}}(\mathbb{R}^n,A_U) = \mathrm{Ext}^p(A_{\{0\}}, \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i}) .$$

Par définition du produit on a l'égalité

(1) $$\mathrm{Hom}(?, \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i}) = \prod_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(?, A_{U_i}) .$$

Le produit est un foncteur exact sur la catégorie des A-modules, d'autre part, un produit de faisceaux injectifs est un faisceau injectif. Par conséquent, (1) donne naissance à la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p(A_{\{0\}}, (R^q \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i}) \Rightarrow R^{p+q}(\prod_{i=0}^{\infty} \mathrm{Hom})(A_{\{0\}}, A_{U_i}) =$$

$$= \prod_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^{p+q}(A_{\{0\}}, A_{U_i}) \quad .$$

Comme $\{0\} \cap U_i = \emptyset$ pour tout i, il résulte que l'aboutissement de la suite spectrale est nulle. Calculons maintenant les termes $E_2^{p,q}$ pour $q > 0$. Le faisceau $(R^q \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i}$ est associé au préfaisceau

$$V \longmapsto \prod_{i=0}^{\infty} H^q(V, A_{U_i}) \ ,$$

puisque le produit est exact dans la catégorie des A-modules, et par conséquent on a pour tout point x de $\mathbb{R}^n$

$$(R^q \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i})_x = \varinjlim_{V \ni x} \prod_{i=0}^{\infty} H^q(V, A_{U_i}) \quad .$$

Pour $x \neq 0$ on trouve des voisinages V convenables tels que $H^q(V, A_{U_i})$ soit nul, donc tous les fibres en dehors de l'origine sont nulles : les faisceaux $(R^q \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i}$ sont concentrés en $\{0\}$. Soit V_j la boule fermé de centre 0 et de rayon $\frac{1}{j}$, on remarque que les V_j forment un système fondamental de voisinages de 0. Pour $j > i$ on trouve $H^q(V_j, A_{U_i}) = 0$, pour $j \leq i$ on a $H^q(V_j, A_{U_i}) = H_c^q(U_i, A)$.

Le dernier terme est nul pour $q \neq n$ et A pour $q = n$.

On obtient finalement le résultat suivant :

$$(R^q \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i} = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0,n$$

$$(R^n \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i})_0 = \varinjlim_{j \to \infty} \prod_{i \geq j} A_i = A^{\mathbb{N}}/A^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Autrement dit le faisceau $(R^n \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i}$ est le faisceau $A^{\mathbb{N}}/A^{(\mathbb{N})}$ concentré en $\{0\}$. Dans la suite spectrale on a donc $E_2^{p,q} = 0$ sauf pour $q = 0$ et pour $q = n$, et par conséquent on a

$$E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \ldots = E_{n+1}^{p,q} \quad .$$

L'aboutissement de la suite spectrale est nulle, donc le morphisme

$$d_{n+1}^{p,n} : E_{n+1}^{p,n} \longrightarrow E_{n+1}^{p+n+1,0}$$

est un isomorphisme. En particulier, $E_2^{0,n}$ est isomorphe à $E_2^{n+1,0}$, ce qui donne

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(A_{\{0\}}, \prod_{i=0}^{\infty} A_{U_i}) = H^{n+1}_{\{0\}}(\mathbb{R}^n, A_U) \simeq \mathrm{Ext}^0(A_{\{0\}}, (R^n \prod_{i=0}^{\infty})A_{U_i} = A^{\mathbb{N}}/A^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Donc, on a bien démontré le résultat annoncé.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Décembre 1966

Exposé 2

DIMENSION DES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

par G. BARTHEL

0 . Préliminaires .

Nous présentons différentes notions de dimension d'un espace localement compact. Les dimensions considérées sont les bornes supérieures des longueurs des résolutions minimales molles (resp. flasques, resp. injectives) des faisceaux sur l'espace considéré. Nous employons les notations suivantes : X désigne un espace localement compact, Y un espace topologique quelconque, A un anneau à élément unité, et X_A (resp. Y_A) la catégorie des faisceaux de A-modules unitaires à gauche de base X (resp. Y) .

1 . Dimension topologique d'un espace localement compact .

1.1. Définition .

Soit F un objet de X_A . On appelle dimension topologique de F et l'on note dimtop F le plus petit entier q tel que F admet une résolution c-molle de longueur q .(c désigne la famille des compacts de X) .

Si F n'admet aucune résolution c-molle finie, on pose dimtop $F = +\infty$, et par convention on pose dimtop $0 = -\infty$.

1.2. Définition .

On appelle A-dimension topologique de l'espace X et l'on note A-dimtop X la borne supérieure des dimensions topologiques des faisceaux $F \in \mathrm{Ob}\ X_A$.

Donnons d'abord une caractérisation des faisceaux c-mous .

1.3. Lemme .

Soit F un objet de X_A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est Φ-mou pour toute famille paracompactifiante Φ .

(ii) F est c-mou .

(iii) Pour tout entier $p > 0$ et pour toute famille paracompactifiante Φ on a $H^p_\Phi(X,F) = 0$.

(iv) Tout point $x \in X$ possède un voisinage V_x tel que pour tout ouvert U contenu dans V_x on a $H^1_c(U,F) = 0$.

Démonstration .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : C'est immédiat, car la famille des compacts d'un espace localement compact est une famille paracompactifiante. (Pour la définition d'une famille paracompactifiante cf. [2] 3.2.) .

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Les faisceaux Φ-mous sont Γ_Φ-acycliques, et on a par définition $H^i_\Phi = R^i\Gamma_\Phi$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : Prenons pour V_x un voisinage compact de x . Le faisceau induit par F sur V_x est c-mou. Soit U un ouvert contenu dans V_x , alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0_c(U,F) \longrightarrow H^0_c(V_x,F) \longrightarrow H^0_c(V_x-U,F) \longrightarrow H^1_c(U,F) \longrightarrow H^1_c(V_x,F) .$$

Le faisceau $F|V_x$ est c-mou, par conséquent $H^1_c(V_x,F)$ est nul, et le morphisme $H^0_c(V_x-U,F) \to H^1_c(U,F)$ est surjectif. D'autre part, l'ensemble V_x-U est un fermé contenu dans le compact V_x , donc compact. Le faisceau F est c-mou, il en résulte que le morphisme $H^0_c(V_x,F) \to H^0_c(V_x-U,F)$ est surjectif, d'où le résultat cherché.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Soit V_x un voisinage quelconque de x et soit U un ouvert contenu dans V_x . La famille de supports

$$\Phi_U = \{K \subset X \mid K \text{ compact}, K \subset U\}$$

est une famille paracompactifiante. Si on considère la suite exacte

$$H^0_{\Phi_U|X-U}(X-U,F) \longrightarrow H^1_{\Phi_U|U}(U,F) \longrightarrow H^1_{\Phi_U}(X,F)$$

on voit immédiatement que les termes extrêmes sont nuls, donc aussi le terme médian. Comme $\Phi_U|U$ n'est autre que la famille des compacts de U on a bien $H^1_c(U,F) = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Soit Φ une famille paracompactifiante quelconque. Si tout point $x \in X$ possède un voisinage U_x tel que, pour tout $S \in \Phi$ contenu dans U_x , toute section au-dessus de S provient d'une section au-dessus de U_x , alors F est Φ - mou. En effet, soit T un ensemble appartenant à Φ : pour tout point $x \in T$ on trouve un voisinage U'_x tel que toute section au-dessus d'un fermé de T contenu dans U'_x provient d'une section au-dessus de U'_x , il suffit de poser $U'_x = U_x \cap T$. Par conséquent le faisceau $F|T$ est mou ([2], Th. 3.4.1.), donc F est Φ - mou .

Soit V_x un voisinage vérifiant (iv) et supposons le compact, ce qui est loisible. Soit U_x l'intérieur de V_x et soit S un ensemble appartenant à Φ et contenu dans U_x . On obtient une suite exacte

$$H^0_c(U_x,F) \longrightarrow H^0_c(S,F) \longrightarrow H^1_c(U_x-S,F) .$$

Comme U_x-S est un ouvert contenu dans V_x , le dernier terme est nul. D'autre part on a $H^0_c(S,F) = H^0(S,F)$ puisque S est compact.

Il en résulte que toute section au-dessus de S provient d'une section au-dessus de U_x . Par conséquent, d'après la remarque ci-dessus, F est Φ - mou .

1.4. Théorème .

Sous les hypothèses du lemme 1.3. , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) dimtop $F \leq q$.

(ii) Pour tout entier $p > q$ et pour toute famille paracompactifiante Φ on a $H^p_\Phi(X,F) = 0$.

(iii) Tout point $x \in X$ possède un voisinage V_x tel que pour tout ouvert U contenu dans V_x on a $H_c^{q+1}(U,F) = 0$.

Démonstration .

Soit $L' : 0 \to L^0 \to L^1 \to L^2 \to \ldots$ une résolution Φ-molle de F . En posant $\mathrm{Im}(L^{q-1} \to L^q) = M^q$ on obtient deux suites exactes

$$\ldots\ldots \to L^{q-2} \to L^{q-1} \to M^q \to 0$$

et

$$0 \to M^q \to L^q \to L^{q+1} \to L^{q+2} \to \ldots ,$$

Le complexe

$$0 \to L^q \to L^{q+1} \to L^{q+2} \to \ldots$$

est une résolution Φ-molle de M^q , ce qui donne

$$H_\Phi^{q+r}(X,F) = H_\Phi^r(X,M^q)$$

pour tout $r \geq 1$. D'autre part, pour toute famille paracompactifiante Φ , la restriction à un ouvert U d'un faisceau Φ-mou donne un faisceau $\Phi|U$-mou . Le foncteur "restriction" est exact, par conséquent on peut calculer les modules $H^q_{\Phi|U}(U,F) = R^q\Gamma_{\Phi|U}(U,F)$ en utilisant la restriction à U de la résolution L' donnée, et on obtient l'égalité

$$H^{q+r}_{\Phi|U}(U,F) = H^r_{\Phi|U}(U,M^q)$$

pour tout $r \geq 1$. Alors le théorème est une conséquence immédiate du lemme 1.3. .

1.5. Lemme (Floyd ([1], Ch. 1, 5.1.), Grothendieck ([3])) .

Soit $E \subset \mathrm{Ob}\, X_A$ une classe de faisceaux possédant les propriétés suivantes :

(i) Si la suite

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

est exacte et si F' et F appartiennent à E , alors F'' appartient à E .

(ii) Si F et G appartiennent à E, alors $F \oplus G$ appartient à E.

(iii) E est stable par la formation des limites inductives filtrantes,

(iv) Pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage U_x tel que le faisceau A_{U_x} et tous les sous-faisceaux de A_{U_x} soient dans E.

Alors E est égal à la classe $\mathrm{Ob}\, X_A$ de tous les faisceaux de A-modules unitaires à gauche de base X.

Démonstration.

Soit $F \in \mathrm{Ob}\, X_A$ un faisceau quelconque, et soit E_F l'ensemble de tous les sous-faisceaux de F qui appartiennent à la classe E. La relation d'ordre sur E_F qui est induit par l'inclusion est inductif. En effet, soit $\{G_i\}_{i\in I}$ un système totalement ordonné dans E_F, alors on a

$$\sup_{i\in I} \{G_i\} = \varinjlim_{i\in I} G_i$$

(en considérant $\{G_i\}_{i\in I}$ comme système inductif). Un système totalement ordonné est bien filtrant, d'où $\sup_{i\in I} \{G_i\} \in E_F$.

Soit $G \in E_F$ maximal et supposons G différent de F. Par conséquent il existe un point $x \in X$ et un élément $\bar{s}(x)$ de la fibre F_x qui n'appartient pas à G_x. L'élément $\bar{s}(x)$ est le germe d'une section s au-dessus d'un voisinage ouvert V_x de x, en restreignant éventuellement, on peut supposer que V_x est contenu dans U_x. On a l'égalité

$$F(V_x) = \mathrm{Hom}\,(A_{V_x}, F),$$

donc s détermine une application $f : A_{V_x} \to F$ (à savoir $s = f(V_x)$ (1), 1 étant la section unité de $A_{V_x}|V_x$).

Soit J le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} J & \dashrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow i \\ A_{V_x} & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

il est clair que $\underline{J}$ s'identifie à un sous-faisceau de A_{V_x}. D'autre part, A_{V_x} ainsi que $\underline{J}$ sont des sous-faisceaux de A_{U_x}, et d'après (iv) ils appartiennent à la classe E. Soit F' la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{J} & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \vdots \\ A_{V_x} & \dashrightarrow & F' \end{array} ,$$

Alors F' est isomorphe à l'image de $A_{V_x} \oplus G$ dans F. Donc F' s'identifie à un sous-faisceau de F qui est strictement plus grand que G, puisqu'il contient G et puisque sa fibre en x contient l'élément $\bar{s}(x)$. D'autre part, F' appartient à la classe E : en effet, la suite

$$0 \longrightarrow \underline{J} \longrightarrow A_{V_x} \oplus G \longrightarrow F' \longrightarrow 0$$

est exacte, et l'application des propriétés (i) et (ii) donne le résultat. Par conséquent on a trouvé un élément de la classe E_F strictement plus grand que G, ce qui est impossible. Par suite on a $G = F$, ce qui donne le résultat cherché.

Le théorème suivant donne une caractérisation des espaces localement compacts de dimension topologique finie.

1.6. Théorème.

Si l'anneau A est noethérien à gauche, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A\text{-dimtop } X \leq q$.

(ii) Tout point $x \in X$ possède un voisinage V_x tel que, pour tout ouvert U contenu dans V_x et pour tout idéal à gauche I de l'anneau A on a $H_c^{q+1}(U, I) = 0$.

Si de plus A est régulier de dimension à gauche finie, la propriété (iii) est équivalent à (i) et (ii) :

(iii) Tout point $x \in X$ possède un voisinage V_x tel que pour tout ouvert U contenu dans V_x on a $H_c^{q+1}(U,A) = 0$.

Démonstration .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Cela résulte immédiatement de 1.4. (iii) . Pour démontrer la réciproque, appelons E la classe des faisceaux dans $Ob\ X_A$ dont la dimension topologique est inférieure à $q+1$. Il reste à vérifier que E possède les propriétés (i) ... (iv) du lemme 1.5. .

Vérification :

(i) : Si dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

les faisceaux F' et F appartiennent à E , on voit qu'il en va de même pour F'' en écrivant la suite exacte longue de cohomologie et en utilisant 1.4. (ii) .

(ii) : Si F et G appartiennent à E , alors $F \oplus G$ appartient à E car $H_\Phi^i(X,F\oplus G)$ est égal à $H_\Phi^i(X,F) \oplus H_\Phi^i(X,G)$.

(iii) : Sur un espace localement compact, le foncteur H_c^i commute aux limites inductives filtrantes ([2],4.12.1.) . Un ouvert d'un espace localement compact est localement compact, donc, d'après la propriété (iii) du théorème 1.4., E est stable par passage aux limites inductives filtrantes.

(iv) : D'après l'hypothèse (ii) et le théorème 1.4. on sait que les faisceaux I_W appartiennent à E (I idéal à gauche de A et W partie localement fermée de X) . Il en résulte en particulier que les faisceaux A_U concentrés sur les ouverts U de X sont des éléments de la classe E . Il reste à démontrer qu'un sous-faisceau arbitraire $\underline{J}$ de A appartient à E . Soit donc x un point de X et soit U_x un voisinage ouvert de x . Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{U \mid U \text{ ouvert}, U \subset U_x , H_c^{q+1}(U,\underline{J}) = 0 \} .$$

Cet ensemble est ordonné inductivement par inclusion. En effet, on a l'égalité

$$H_c^{q+1}(U,\underline{J}) = H_c^{q+1}(X,\underline{J}_U) \ .$$

Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un ensemble totalement ordonné d'éléments de $\mathcal{U}$ de réunion U. Alors on a

$$\underline{J}_U = \varinjlim_i \underline{J}_{U_i} \ ,$$

et puisque la cohomologie à support compact commute aux limites inductives filtrantes on trouve

$$H_c^{q+1}(U,\underline{J}) = \varinjlim_i H_c^{q+1}(U_i,\underline{J}) = 0 \ .$$

Soit U un élément maximal de $\mathcal{U}$, supposons U différent de U_x. Alors le complémentaire de U dans U_x est un fermé de U_x, appelons K cet ensemble. Comme les fibres du faisceau $\underline{J}$ sur K sont une famille d'idéaux de l'anneau noethérien A, elles possèdent un élément maximal $J_o = \underline{J}_{y_o}$. On sait que, pour tout y assez voisin de y_o, la fibre $\underline{J}_{y_o}$ est contenu dans $\underline{J}_y$, et puisque $\underline{J}_{y_o}$ est maximal dans la famille $\{\underline{J}_y\}_{y\in K}$, il en résulte qu'il existe un voisinage ouvert W de y_o dans K tel que $\underline{J}_W$ est égal à $(J_o)_W$. Comme W est un ouvert de K, il existe un ouvert U' de X tel qu'on a

$$W = U' \cap U_x \cap X-U \ ,$$

donc W est localement fermé dans X.

Le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{J}_{U\cup W} & \dashrightarrow & \underline{J}_{U_x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{J}_W & \longrightarrow & \underline{J}_{U_x-U} \end{array}$$

n'est autre que $\underline{J}_{U\cup W}$. La suite exacte

$$0 \to \underline{J}_U \to \underline{J}_{U_x} \to \underline{J}_{U_x - U} \to 0$$

induit donc par changement de base une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \underline{J}_U \to \underline{J}_{U \cup W} \to \underline{J}_W \to 0 \ .$$

Considérons la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à (*) :

$$\ldots \to H_c^{q+r}(U, \underline{J}) \to H_c^{q+r}(U \cup W, \underline{J}) \to H_c^{q+r}(W, \underline{J}) \to \ldots .$$

pour $r \geq 1$. Le premier terme est nul, car U est un élément de la famille $\mathcal{U}$. Comme le faisceau $(J_o)_W$ appartient à la classe E , le dernier terme est aussi nul. Par conséquent le terme médian est nul, L'ensemble $U \cup W$ n'est autre que l'ouvert $U' \cap U_x$, c'est donc un ouvert strictement plus grand que U qui appartient à l'ensemble $\mathcal{U}$, d'où une contradiction. Finalement on a $U = U_x$, et par suite $\underline{J}$ appartient à la classe E .

Les propriétés du lemme 1.5. sont vérifiées, et par conséquent on a démontré : (ii) $\Rightarrow$ (i) .

Pour terminer la démonstration du théorème supposons de plus l'anneau A régulier de dimension à gauche finie. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale, reste à vérifier la réciproque. Soit donc I un idéal à gauche quelconque. D'après les hypothèses sur l'anneau A il existe une résolution projective finie de I :

$$\ldots \to 0 \to P_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \ldots .$$

Puisque l'anneau A est noethérien à gauche on peut supposer que tous les P_i sont des modules libres de type fini pour $i \neq n$ et que le module P_n est facteur direct d'un module libre de type fini. Il est clair qu'on a $\operatorname{dimtop} P_i \leq q$ pour tout i , de plus les suites exactes

$$0 \to \operatorname{Im} d_i \to P_{i-1} \to \operatorname{Im} d_{i-1} \to 0$$

montrent par récurrence sur i qu'on a $\operatorname{dimtop} \operatorname{Im} d_i \leq q$ pour tout i , ce qui donne $\operatorname{dimtop} I \leq q$. Le théorème est donc démontré.

2 . Dimension topologique stricte .

Dans ce paragraphe Y est un espace topologique et F un objet de Y_A .

2.1. Définition .

On appelle dimension topologique stricte de F *et l'on note* dimstop F *l'entier* q *égal à la longueur minimale des résolutions flasques finies de* F .

2.2. Définition .

On appelle dimension topologique stricte de F *au point* $y \in Y$ *l'entier* q *tel que le complexe* $(\mathcal{H}^*_K F)_y$ *soit de longueur inférieure à* $q+1$ *pour tout fermé* K *de* Y , *mais* $(\mathcal{H}^{q-1}_K F)_y$ *non nul pour un fermé* K .

Dans les définitions 2.1. et 2.2. , on fait les conventions supplémentaires de la définition 1.1. .

2.3. Définition .

La A-dimension topologique stricte de l'espace Y , *notée* A-dimstop Y , *est la borne supérieure des dimensions topologiques strictes des objets de* Y_A .

De même, on appelle A-dimension topologique stricte de Y *au point* y *et l'on note* A-dimstop$_y$ Y *la borne supérieure* $\sup_{F \in Ob\, Y_A} \text{dimstop}_y F$.

Le lemme suivant caractérise les faisceaux flasques.

2.4. Lemme .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le faisceau* F *est flasque* .

(ii) *Pour tout fermé* K *de* Y , *on a* $H^1_K(Y,F) = 0$.

(iii) *Pour tout fermé* K *de* Y , *on a* $\mathcal{H}^1_K F = 0$.

Démonstration .

(i) ⇒ (ii) : Puisque F est un faisceau flasque, on a $H^1(Y,F) = 0$ et le morphisme de restriction $H^0(Y,F) \to H^0(Y-K,F)$ est surjectif. Donc l'exactitude de la suite

$$0 \to H^0_K(Y,F) \to H^0(Y,F) \to H^0(Y-K,F) \to H^1_K(Y,F) \to H^1(Y,F)$$

implique $H^1_K(Y,F) = 0$.

(ii) ⇒ (i) se démontre immédiatement en utilisant la même suite exacte .

(i) ⇒ (iii) : Si U est un ouvert de Y , le faisceau restreint $F|U$ est flasque, on a donc $H^1_{K \cap U}(U,F) = 0$ pour tout fermé K (puisque (i) ⇒ (ii)) . Comme $\mathcal{H}^1_K F$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto H^1_{K \cap U}(U,F) \qquad \text{(cf. [4], 3.1.)}$$

on a bien $\mathcal{H}^1_K F = 0$.

(iii) ⇒ (i) : Soit s une section de F au-dessus d'un ouvert U. L'ensemble des prolongements de s est donné par les couples (W,t) , où W est un ouvert contenant U et t une section au-dessus de W qui coïncide avec s sur U . On sait que la relation : t est un prolongement de t' est une relation d'ordre inductif. Soit (W,t) un élément maximal, il reste à vérifier que W est égal à Y tout entier. Supposons donc W différent de Y et appellons K le fermé complémentaire $Y-W$. Soit y un point de K et V un voisinage ouvert de y dans Y . On a la suite exacte

$$0 \to H^0_{K \cap V}(V,F) \to H^0(V,F) \to H^0(V \cap W,F) \xrightarrow{\partial} H^1_{K \cap V}(V,F) \ldots$$

On sait par hypothèse

$$(\mathcal{H}^1_K F)_y = \varinjlim_{U \ni y} H^1_{K \cap U}(U,F) = 0 .$$

Par conséquence, si on remplace V par un voisinage ouvert plus petit V' on voit que $s|V' \cap W$ est dans le noyau de ∂ et provient donc d'une section s' au-dessus de V' . Il en résulte que s se prolonge sur l'ouvert $W \cup V'$ qui est strictement plus grand que W , ce qui contredit l'hypothèse faite sur W . Donc on a bien l'égalité $W = Y$, ce qui donne le résultat cherché .

2.5. Théorème .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) dimstop $F \leq q$.

(ii) Pour tout fermé K de Y , on a $H_K^{q+1}(Y,F) = 0$.

(iii) Pour tout fermé K de Y , on a $\mathcal{H}_K^{q+1} F = 0$.

Démonstration .

Le théorème 2.5. se démontre à partir de 2.4. comme le théorème 1.4. à partir de 1.3. .

2.5.1. Corollaire .

On a l'égalité

$$\text{dimstop}\, F = \sup_{y \in Y} \text{dimstop}_y F$$

pour tout faisceau $F \in \text{Ob}\, Y_A$ et par suite

$$A\text{-dimstop}\, Y = \sup_{y \in Y} A\text{-dimstop}_y Y \ .$$

Cela résulte immédiatement du théorème 2.5. et des définitions.

Le corollaire montre que la notion de A-dimension topologique stricte est une notion locale.

3 . Dimension injective .

Les notions de 2. sont conservées dans ce paragraphe .

3.1. Définition .

On appelle A-dimension injective de F et l'on note A-diminj F la borne inférieure des longueurs des résolutions injectives de F .

3.2. Définition .

On appelle A-dimension injective de F au point $y \in Y$ et l'on note $A\text{-diminj}_y F$ la borne supérieure (suivant les fermés K de Y) des A-dimensions injectives des complexes $(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y$, où $I^\cdot(F)$ est une résolution injective de F . Rappelons que la A-dimension injective de ce complexe est par définition le plus petit entier q tel que $\mathrm{Ext}^p_A(N,(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y)$ est nul pour tout $p > q$ et pour tout A-module N .

Bien entendu, on fait les conventions supplémentaires de la définition 1.1. .

3.3. Définition .

La A-dimension injective de l'espace Y , notée $A\text{-diminj } Y$, est la borne supérieure des dimensions injectives des objets de Y_A . De même, on définit la A-dimension injective de l'espace Y au point y par

$$A\text{-diminj}_y Y = \sup_{F \in Ob\, Y_A} A\text{-diminj}_y F \ .$$

Dans la suite, on supposera toujours que l'anneau A est noethérien à gauche. Le lemme suivant donne une caractérisation des faisceaux injectifs.

3.4. Lemme .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le faisceau F est injectif .

(ii) Le faisceau F est flasque. De plus, pour tout point y et tout fermé K de Y , le A-module $(\mathcal{H}^0_K F)_y$ est injectif .

Démonstration .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : On sait qu'un faisceau injectif est flasque. De plus, si F est injectif, il en va de même de $\mathcal{H}^0_K F$ (cf. [4], 2.5.) quel que soit le fermé K . Pour tout ouvert U le A-module $\mathcal{H}^0_K F(U)$ est donc injectif ;

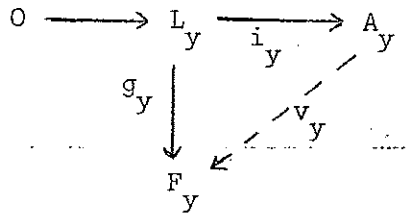
comme A est noethérien, la limite inductive

$$\varinjlim_{y \in U} \mathcal{H}^0_K F(U) = (\mathcal{H}^0_K F)_y$$

est aussi un A-module injectif.

(ii) ⇒ (i) : Pour démontrer que F est injectif, il suffit de vérifier que tout homomorphisme d'un sous-objet d'un générateur de la catégorie Y_A dans F se prolonge à un homomorphisme de ce générateur dans F ([3], 1.10, lemme 1) . Ici les générateurs sont les faisceaux A_U , où U est un ouvert de Y ([3], Prop. 3.1.1.) . On voit immédiatement qu'il suffit de montrer que tout homomorphisme d'un sous-faisceau du faisceau constant A dans F se prolonge à A tout entier. Soit donc $\underline{J}$ un sous-faisceau de A et $f : \underline{J} \to F$ un homomorphisme. L'ensemble des prolongements de f est donné par les couples (L,g) , où L est un sous-faisceau de A contenant $\underline{J}$ et $g : L \to F$ un homomorphisme qui coïncide avec f sur $\underline{J}$. Sur cet ensemble on a une relation d'ordre inductif bien connue. Soit (L,g) un prolongement maximal, il reste à vérifier que L est égal à A . Supposons L différent de A . Puisque l'anneau A est noethérien, il existe un idéal J_o de A et un ouvert V de Y tel que $(J_o)_V$ est égal à L_V .

(1) Supposons J_o différent de A , et soit y un point de V . Dans le diagramme (i désigne l'inclusion de L dans A)



le module F_y est injectif, en effet on a $F = \mathcal{H}^0_Y F$. Par conséquent il existe un morphisme $v_y : A_y \to F_y$ qui rend le diagramme commutatif. L'élément $v_y(1)$ de F_y provient d'une section de F au-dessus d'un voisinage ouvert W de y . Soit $v : A_W \to F$ l'homomorphisme associé à cette section. Par définition, on a : $(vi)_y = g_y$. Il en résulte qu'il existe un ouvert W' contenant y et contenu dans W tel que vi = f au-dessus de W' . En effet l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om(L,F)_y \longrightarrow \mathrm{Hom}(J_o, F_y)$$

est un isomorphisme. Pour le démontrer on considère plus généralement l'homomorphisme

$$(*) \qquad \mathcal{H}om(M,F)_y \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,F_y)$$

dans le cas où M est un A-module de présentation finie. Il est clair que $(*)$ est un isomorphisme pour des modules M libres de type fini. Dans le cas général la suite exacte

$$M'' \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(M'' et M' libre de type fini) conduit à un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(M,F)_y & \longrightarrow & \mathcal{H}om(M',F)_y & \longrightarrow & \mathcal{H}om(M'',F)_y \\ & & \downarrow (*) & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M,F_y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M',F_y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M'',F_y) \end{array}$$

où les deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes, donc aussi la première. Notre affirmation en résulte aussitôt, compte tenu du fait que J_o est de présentation finie puisque A est noethérien et que $L|W$ est égal au faisceau constant J_o sur W. Par suite, on a prolongé g sur la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_{W'} & \longrightarrow & J \\ \downarrow & & \vdots \\ A_{W'} & \dashrightarrow & L' \end{array}$$

qui est un sous-faisceau de A strictement plus grand que L.

(2) Supposons J_o égal à A, et appellons V l'ouvert sur lequel les fibres des faisceaux L et A sont égales. La section $g(V)(1)$ de F au-dessus de V se prolonge à une section globale car F est un faisceau flasque. Soit $t : A \to F$ l'homomorphisme induit par cette section. Pour prolonger g, il suffit de prolonger l'homomorphisme $g-ti$, et comme g et ti coïncident sur V, on est ramené au cas d'une application dont le support

est dans le fermé $K = Y-V$, i.e. une application de L_K dans F . D'après [4], 2.3. elle se factorise à travers $\mathcal{H}^0_K F$. Puisque les fibres de $\mathcal{H}^0_K F$ sont des modules injectifs par hypothèse, on peut appliquer le raisonnement de (1) pour prolonger g sur un sous-faisceau de A strictement plus grand que L .

Dans les deux cas, on a pu prolonger g , contrairement à l'hypothèse de maximalité du couple (L,g) . Le faisceau F est donc injectif .

3.5. Théorème .

On a l'égalité

$$A\text{-dim}_{\text{in}}\, j\, F = \sup_{y\in Y} A\text{-dim}_{\text{inj}_y} F$$

pour tout faisceau $F \in \text{Ob}\, Y_A$ et par suite

$$A\text{-dim}_{\text{inj}}\, Y = \sup_{y\in Y} A\text{-dim}_{\text{inj}_y} Y \ .$$

Démonstration .

Si $I^\cdot(F)$ est une résolution injective de F , on voit que les modules $(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y$ sont injectifs quel que soit le fermé K (d'après 3.4.) . Les groupes $\text{Ext}^p_A(N,(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y)$ sont donc les groupes de cohomologie du complexe $\text{Hom}_A(N,(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y)$. Si $I^\cdot(F)$ est borné, il en va de même de $\text{Hom}_A(N,(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y)$ et on a bien

$$A\text{-dim}_{\text{inj}}\, F \geq \sup_{y\in Y} A\text{-dim}_{\text{inj}_y} F \ .$$

Soit maintenant $q = \sup_{y\in Y} A\text{-dim}_{\text{inj}_y} F$. Le complexe $(\mathcal{H}^0_K I^\cdot(F))_y$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow (\mathcal{H}^0_K I^0(F))_y \longrightarrow (\mathcal{H}^0_K I^1(F))_y \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathcal{H}^0_K I^q(F))_y \longrightarrow \text{Ker}(\mathcal{H}^0_K d^{q+1})_y$$

où $d^{q+1} : I^{q+1}(F) \to I^{q+2}(F)$ est la différentielle du complexe $I^\cdot(F)$ en degré $q+1$. De plus le A-module $\text{Ker}(\mathcal{H}^0_K d^{q+1})_y$ est injectif ([5] , c. Prop. 7.6.) .

Pour terminer la démonstration du théorème il suffit donc de montrer que $\operatorname{Ker} d^{q+1}$ est flasque (puisque $\mathcal{H}^0_K$ est exact à gauche) et pour cela que $\mathcal{H}^1_K \operatorname{Ker} d^{q+1}$ est nul (cf. 2.4.) . Mais le complexe

$$0 \longrightarrow I^{q+1}(F) \to I^{q+2}(F) \to I^{q+3}(F) \to \dots$$

est une résolution flasque de $\operatorname{Ker} d^{q+1}$, et par hypothèse la suite

$$0 \to \operatorname{Ker} \mathcal{H}^0_K d^{q+1} \to \mathcal{H}^0_K I^{q+1}(F) \to \mathcal{H}^0_K I^{q+2}(F) \to \dots$$

est exacte. On a donc bien $\mathcal{H}^1_K \operatorname{Ker} d^{q+1} = 0$, ce qui montre que le faisceau $\operatorname{Ker} d^{q+1}$ est injectif, et par conséquent on a $\operatorname{dimin}_j F \leqslant q$, d'où le résultat annoncé .

4 . Relations entre les différentes notions de dimension .

Dans tout ce qui suit, X est un espace localement compact et F un objet de la catégorie X_A .

4.1. Théorème .

On a la relation

$$\operatorname{dimtop} F \leqslant \operatorname{dimstop} F$$

pour tout faisceau F et par suite

$$A\text{-dimtop } X \leqslant A\text{-dimstop } X .$$

Démonstration .

Puisqu'un faisceau flasque est aussi c-mou, toute résolution flasque $M^\cdot$ d'un faisceau F est donc une résolution c-molle de F . Alors le théorème est immédiat.

4.2. Théorème .

Supposons que X vérifie la propriété :

(RCP) Tout ouvert relativement compact est paracompact .

Alors on a

$$\text{dimstop } F \leq \text{dimtop } F + 1$$

pour tout faisceau F et par suite

$$\text{A-dimstop } X \leq \text{A-dimtop } X + 1 \text{ .}$$

Démonstration .

Supposons que la dimension topologique du faisceau F soit égal à q . Soient U un ouvert relativement compact et K un fermé de X . On a alors

$$H^{q+1}(U-U \cap K,F) = H^{q+2}(U,F) = 0 \text{ .}$$

En effet, la restriction à U d'une résolution c-molle de F est une résolution c-molle du faisceau $F|U$, ce qui donne en particulier que la dimension topologique de $F|U$ est au plus égal à q . D'autre part U est paracompact, et par conséquent la famille de tous les fermés de U est une famille paracompactifiante dans U . On a donc

$$H^{q+1}(U,F) = H^{q+2}(U,F) = \ldots = 0 \text{ . (Th. 1.4.) .}$$

L'affirmation se démontre complètement en appliquant le même raisonnement à l'ouvert relativement compact $U-U \cap K$. La suite exacte

$$H^{q+1}(U-U \cap K,F) \longrightarrow H^{q+2}_{K \cap U}(U,F) \longrightarrow H^{q+2}(U,F)$$

montre donc que $H^{q+2}_{K \cap U}(U,F)$ est nul. Comme tout point de X possède un système fondamental de voisinages relativement compacts, il en résulte que $\mathcal{H}^{q+2}_K F$ est aussi nul. Le théorème résulte alors de 2.5. .

4.2.1. Remarque .

L'inégalité donnée dans le théorème 4.1. est stricte. Par exemple, la dimension topologique stricte de l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ est égale à $n+1$. (cf. [4], 5.3.) .

4.3. Théorème .

Supposons que la propriété (RCP) est vérifiée et que l'anneau A est régulier de dimension à gauche p . Alors on a l'inégalité

$$A\text{-diminj } X \leq A\text{-dimtop } X + p + 1 .$$

Démonstration :

Soit $I^\cdot$:

$$0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots \to I^{p+q} \to I^{p+q+1} \to I^{p+q+2} \to \dots$$

une résolution injective d'un faisceau F de base X dont la dimension topologique est égal à q . D'après le théorème 4.2. , le faisceau $\operatorname{Ker} d^{q+1}$ est flasque. La suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} d^{q+1} \to I^{q+2} \to \dots \to I^{q+p} \to I^{q+p+1} \to \dots$$

montre par récurrence que tous les faisceaux $\operatorname{Ker} d^{q+r}$ $(r \geq 1)$ sont flasques. Par l'application du foncteur $H^0_{K \cap U}(U,?)$. on obtient une suite exacte qui, par passage à la limite inductive, donne la suite

$$0 \to (\mathcal{H}^0_K \operatorname{Ker} d^{q+1})_y \to (\mathcal{H}^0_K I^{q+1})_y \to \dots \to (\mathcal{H}^0_K I^{q+p})_y \to (\mathcal{H}^0_K \operatorname{Ker} d^{q+p+1})_y \to 0$$

qui est exacte quel que soit le fermé K de X et le point y . Dans cette suite, les termes $(\mathcal{H}^0_K I^{q+r})_y$ $(1 \leq r \leq p)$ sont injectifs, et par conséquent, il en va de même de $(\mathcal{H}^0_K \operatorname{Ker} d^{p+q+1})_y$ puisque A est de dimension p . Finalement, le faisceau $\operatorname{Ker} d^{p+q+1}$ est injectif d'après 3.4. et par conséquent on a l'inégalité cherchée .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et al.- Seminary on Transformation Groups.- Annals of Math. Studies 46 , Princeton 1960 .

[2] R. GODEMENT.- Théorie des faisceaux, Ch. II .

[3] A. GROTHENDIECK.-Sur quelques points d'algèbre homologique.- Tohoku Math. Journal 9 (1957) ; pp. 119... 221 .

[4] J.L. VERDIER.- Cohomologie à support dans un fermé.- Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, exp. 1 .

[5] R. HARTSHORNE.- Residues and Duality.- Lecture notes in Math.; Springer, Heidelberg 1966 .

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966/67

Exposé 3

LE FONCTEUR IMAGE DIRECTE A SUPPORT PROPRE

par R. GERGONDEY

0. Préliminaires topologiques.

Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts,

$f : X \longrightarrow Y$ une application continue

On a alors équivalence entre les trois propriétés suivantes :

a) f est propre (i.e. f est fermée et le reste après tout changement de base),

b) f est fermée et, pour tout point y de Y, la fibre $f^{-1}(y)$ est compacte,

c) l'image réciproque $f^{-1}(K)$ de tout compact K de Y est compacte.

(Voir Bourbaki, Topologie 1,...)

Définition.

Soient U un ouvert de Y, F un fermé de $f^{-1}(U)$. On dit que F est propre sur U si l'application restreinte

$$f|_F : F \longrightarrow U$$

est propre.

D'après ce qui vient d'être dit, cela signifie que pour tout compact K contenu dans U, le sous-ensemble de X, $F \cap f^{-1}(K)$ est compact.

0.1. Proposition.

La propriété "F est propre sur U" est locale ; en d'autres termes si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ (U_i ouverts) ; alors

F propre sur $U \Leftrightarrow$ pour tout i , $F \cap f^{-1}(U_i)$ est propre sur U_i .

Δ L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Démontrons $\Leftarrow$.

Soit K un compact contenu dans U . Puisque Y est localement compact, on peut trouver des compacts K_i tels que

$$K_i \subset U_i \qquad \text{pour tout } i \ ,$$

$$K_i = \phi \qquad \text{pour presque tout } i \ ,$$

$$K \subset \bigcup_{i \in I} K_i \ .$$

Or

$$F \cap f^{-1}(K) \subset F \cap f^{-1}(\bigcup_i K_i) = \bigcup_i (F \cap f^{-1}(K_i)) \ .$$

Comme $F \cap f^{-1}(K_i)$ est compact et est vide pour presque tout i , la réunion

$$\bigcup_i (F \cap f^{-1}(K_i)) \quad \text{est compacte}$$

et $F \cap f^{-1}(K)$, qui est fermé dans $\bigcup_i (F \cap f^{-1}(K_i))$, est aussi compact . ∇

1 . Le foncteur image directe à support propre .

Nous restons dans la situation de 0. , à savoir

X et Y localement compacts .

$f : X \longrightarrow Y$ continue .

Si A est un anneau commutatif unitaire, on désignera par X_A (resp. Y_A) la catégorie des A-Modules sur X (resp. Y) .

a) Définition .

Soit F un A-Module sur X ; on sait que le préfaisceau $f_* F$ défini par

$$f_* F(U) = \Gamma(f^{-1}(U), F)$$

est un faisceau .

Si on désigne maintenant par $\Gamma_{\Phi(U)}(f^{-1}(U),F)$ le sous-A-module de $\Gamma(f^{-1}(U),F)$ formé par les sections dont le support est propre sur U, on a la

1.1. Proposition .

Le préfaisceau sur Y

$$f_!F : U \longrightarrow \Gamma_{\Phi(U)}(f^{-1}(U),F)$$

est un faisceau .

Il faut démontrer que, si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ (U_i ouverts de Y), la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi(U)}(f^{-1}(U),F) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} \Gamma_{\Phi(U_i)}(f^{-1}(U_i),F) \overset{\beta}{\rightrightarrows} \prod_{(i,j) \in I \times I} \Gamma_{\Phi(U_{ij})}(f^{-1}(U_{ij}),F)$$

est exacte.

Or l'exactitude en α provient simplement du fait que f_*F est un faisceau. L'exactitude en β signifie que, si des sections s_i de F sur $f^{-1}(U_i)$ se recollent en une section s sur $f^{-1}(U)$ alors

s est à support propre sur $U \Leftrightarrow s_i$ est a support propre sur U_i, pour tout i .

Ce qui résulte de la proposition 0.1. ∇

Il est clair que nous venons de définir un foncteur additif, exact à gauche

$$f_! : X_A \longrightarrow Y_A \quad .$$

Comme X_A possède assez d'injectifs, on sait définir les foncteurs dérivés à droite

$$R^n f_! : X_A \longrightarrow Y_A \quad \text{avec} \quad R^o f_! = f_! \quad .$$

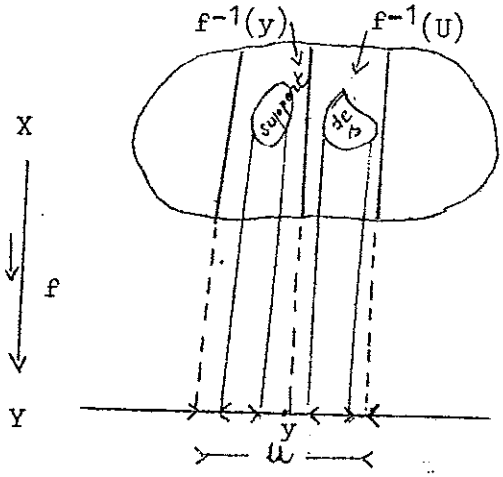
b) Identification des fibres de $f_!F$.

1.2. Proposition .

Si $y \in Y$, l'application canonique

$$\varphi : (f_! F)_y \to H_c^o(f^{-1}(y),F) \quad \underline{\text{est un isomorphisme}} .$$

Δ En revenant aux définitions, nous voulons démontrer que l'application



$$\varphi : \varinjlim_{U \ni y} (f_! F(U)) \longrightarrow H_c^o(f^{-1}(y),F) ,$$

définie par les restrictions

$$\Gamma_{\Phi(U)}(f^{-1}(U),F) \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y),F) ,$$

est bijective .

α) φ <u>est injective</u> . Une section s à support propre sur U induisant zéro sur la fibre a donc un support disjoint de $f^{-1}(y)$. Ce support se projette suivant un fermé de U qui ne contient pas y ; le germe de s suivant le filtre des voisinages de y est donc nul .

β) φ <u>est surjective</u> . Il suffira de le démontrer pour les faisceaux F c-mous . Le cas général s'obtiendra en utilisant une résolution c-molle de F .

Mais si σ est une section sur $f^{-1}(y)$ dont le support est un compact de $f^{-1}(y)$, elle peut être prolongée en une section à support compact sur $f^{-1}(U)$ pour tout voisinage ouvert U de y . ∇

1.2.1. <u>Corollaire</u> .

$$(R^n f_!)_y \xrightarrow{\sim} H_c^n (f^{-1}(y),F) .$$

1.2.2. <u>Corollaire</u> .

<u>Les foncteurs</u> $R^n f_!$ <u>commutent aux</u> $\varinjlim$ <u>filtrantes</u>

Δ Résulte de 1.2.1. et du théorème 4.12.1. de Godement [G] . ∇

c) Passage à la catégorie dérivée .

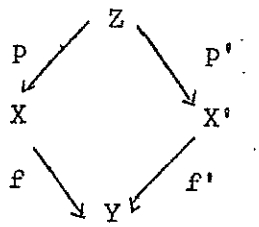
En vertu des théorèmes généraux sur les catégories dérivées, nous savons que l'on peut définir un foncteur

$$R^+ f_! : D^+(X_A) \longrightarrow D^+(Y_A) .$$

Mais si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur f , $R^+ f_!$ ne se prolonge pas à $D(X_A)$ [H] .

d) Formule du changement de base .

Nous sommes dans la situation suivante :



est un diagramme cartésien d'applications continues d'espaces topologiques localement compacts .

Nous pouvons alors définir un morphisme de foncteurs

$$\Psi_{f'} : f'^* f_! \longrightarrow p'_! p^*$$

de la manière suivante : en vertu des propriétés d'adjonction de f'^* et f'_* , il suffit de définir un morphisme

$$\Phi_{f'} : f_! \longrightarrow f'_* p'_! p^* .$$

Soit pour tout faisceau F sur X et tout ouvert U de Y un homomorphisme

$$\Phi_{f'}(F,U) : f_! F(U) \longrightarrow p'_! p^* F(f'^{-1}(U))$$

fonctoriel en F et U. Un élément γ de $f_!F(U)$ est, par définition, une section de F sur $f^{-1}(U)$, à support propre sur U. On appelle $\Phi_{f'}(F,U)(\gamma)$ la section correspondante de p^*F sur $p^{-1}(f^{-1}(U)) = p'^{-1}(f'^{-1}(U))$ qui, étant à support propre sur $f'^{-1}(U)$ est, par suite, un élément de $p'_! p^*F(f'^{-1}(U))$.

Lorsque f' est une application de l'espace réduit à un point dans Y, les morphismes $\psi_{f'}$ ne sont autres que ceux définis à la proposition 1.2.

De plus, pour tout point $x' \in X'$, le morphisme $(\psi_{f'})_{x'}$, restriction de $\psi_{f'}$ aux fibres en x', s'insère dans un diagramme commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} (f'^* f_!)_{x'} & \xrightarrow{(\psi_{f'})_{x'}} & (p'_! p^*)_{x'} \\ \| & & \downarrow \wr \\ & & H^o_c(p'^{-1}(x'), p^*F/p'^{-1}(x')) \\ & & \| \\ (f_!)_{f'(x')} & \xrightarrow{\sim} & H^o_c(f^{-1}(f'(x')), F/f^{-1}(f'(x'))) \end{array}$$

où les deux isomorphismes sont les isomorphismes canoniques de 1.2 et où les deux signes $=$ (abusifs) sont en fait des isomorphismes canoniques de transition entre les foncteurs "image réciproque". La commutativité de $(*)$ est un cas particulier d'une propriété de commutativité plus générale décrivant le comportement du morphisme $\psi_{f'}$ par rapport aux compositions des applications. Les morphismes $\psi_{f'}$ induisent des morphismes fonctoriels

$$\psi^q_{f'} : f'^* R^q f_! \longrightarrow R^q p'_! p^* \quad , \qquad q \geq 0 .$$

Nous nous proposons de démontrer le

1.3. Théorème du changement de base.

Les morphismes

$$\psi^q_{f'} : f'^* R^q f_! \longrightarrow R^q p'_! p^*$$

sont des isomorphismes.

Δ Il suffit de montrer que, pour tout faisceau F sur X, et pour tout point x' de X', ψ^q induit un isomorphisme des fibres :

$$(\psi^q_{f'})_{x'} : (f'^* R^q f_!(F))_{x'} \longrightarrow (R^q p'_! p^*(F))_{x'} \quad .$$

Mais la commutativité du diagramme (*) et le corollaire 1.2.1 nous montrent que ce morphisme est isomorphe à l'isomorphisme canonique de transition :

$$H^q_c(f^{-1}(f'(x')),F) \longrightarrow H^q_c(p'^{-1}(x'),p^*(F)) \quad . \ \nabla$$

e) Quelques cas particuliers .

$X \xrightarrow{f} Y$ α) Si Y est réduit à un point, alors pour tout faisceau F sur X, le faisceau $R^q f_! F$ sur Y est celui dont la fibre est le q-ième groupe de cohomologie à support compact de X à valeurs dans F soit $H^q_c(X,F)$.

β) Si f est une application propre, tous les fermés de X sont propres sur Y et on a

$$f_! = f_* \quad .$$

γ) Supposons que f soit une immersion ouverte

$$f : U \longrightarrow Y \quad .$$

Alors $f_!$ n'est pas autre chose que le foncteur "prolongement par zéro en dehors de U" . Ce foncteur a le bon goût d'être exact .

1.3.1. Application .

Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \longrightarrow & Y \end{array}$$

et soit F un faisceau sur X . Le théorème 1.3 montre alors que l'on a un isomorphisme

$$(R^q f_!(F))|_U \xrightarrow{\sim} R^q f_{U!}(F|f^{-1}(U)) \quad .$$

δ) Supposons que f soit une immersion fermée

$$f : K \longrightarrow Y \quad .$$

Une fois de plus, $f_!$ est le foncteur f^Y (prolongement par zéro en dehors de K) qui est exact .

f) Comportement vis-à-vis des faisceaux c-mous .

On constate aisément que lorsque f n'est pas propre, $f_!$ ne transforme pas nécessairement les faisceaux injectifs en faisceaux injectifs puisqu'il ne transforme pas nécessairement les faisceaux flasques en faisceaux flasques . Cependant on a la

1.4. Proposition .

$f_!$ transforme les faisceaux c-mous sur X en faisceaux c-mous sur Y .

Δ Soit F un faisceau c-mou sur X .
Nous devons montrer que pour tout compact K de Y , toute section de $f_!F$ sur K s'étend en une section de $f_!F$ sur Y à support compact . Autrement dit, que l'homomorphisme de restriction

$$\begin{array}{ccc} H^0_c(Y, f_!F) & \longrightarrow & H^0(K, f_!F) \\ & & \| \\ & & H^0_c(K, f_!F) \end{array}$$

est surjectif . Or, de la suite exacte des espaces fermés ,

$$0 \longrightarrow F_{f^{-1}(Y-K)} \longrightarrow F \longrightarrow F_{f^{-1}(K)} \longrightarrow 0 \ ,$$

on tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow f_! F_{f^{-1}(Y-K)} \longrightarrow f_! F \longrightarrow f_! F_{f^{-1}(K)} \longrightarrow 0 \ ,$$

car il résulte de 1.3 que les faisceaux c-mous sont acycliques pour $f_!$; puis, du corollaire 1.3.1 , et de l'exactitude des foncteurs "d'extension par zéro " , la suite exacte

$$0 \longrightarrow (f_! F)_{Y-K} \longrightarrow f_! F \longrightarrow (f_! F)_K \longrightarrow 0$$

qui suffit à terminer la démonstration . ∇

1.4.1. Corollaire (Suite spectrale de composition) .

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{y} Z$ une suite d'applications continues d'espaces localement compacts . Alors le morphisme canonique

$$\xi^+ : R^+(gf)_! \longrightarrow R^+g_!\ R^+f_!$$

est un isomorphisme .

Δ Voir Hartshorne [H] p. 59 , prop. 5.4 et ce séminaire . ∇

En d'autres termes, on a une suite spectrale convergente

$$R^{p+q}(gf)_! F \Leftarrow R^p g_! (R^q f_! F) \ .$$

2 . Dimension cohomologique relative .

Comme d'habitude $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue d'espaces localement compacts .

2.1. Définition .

On dit que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure ou égale à l'entier n , et on écrit $dch_! f \leq n$, si pour tout entier $n' > n$, le foncteur dérivé $R^{n'} f_!$ est nul .

2.2. Proposition .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) $dch_! f \leq n$,

ii) $dch_c f^{-1}(y) \leq n$ pour tout $y \in Y$.

Δ L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est triviale : il suffit de faire agir $f_!$ sur un faisceau concentré sur $f^{-1}(y)$. Quant à ii) $\Rightarrow$ i) , c'est aussi trivial si on remarque que, pour tout faisceau F ,

$$\forall\ y \in Y \quad H_c^{n'}(f^{-1}(y),F) = (R^{n'} f_! F)_y = 0 \text{ entraîne } R^{n'} f_! F = 0 . \ \nabla$$

2.3. Définition .

$$dch_! f = \inf \{n / dch_! f \leq n\}$$ (peut être éventuellement infini.)

2.3.1. Corollaire .

$$dch_! f = \sup_{y \in Y} dch_c f^{-1}(y) .$$

3 . Questions d'acyclicité .

3.1. Définition .

Un faisceau M de A-modules sur X est dit $f_!$-acyclique si pour tout entier $n > 0$ on a $R^n f_! M = 0$.

3.2. Définition .

Un faisceau M de A-modules sur X est dit $f_!$-mou, si pour tout y de Y le faisceau restreint $M|f^{-1}(y)$ est c-mou .

Remarque : Un faisceau c-mou est $f_!$-mou .

3.3. Théorème .

Soit M un faisceau de A-modules sur X .
Les deux assertions suivantes sont équivalentes

i) M est $f_!$-mou .

ii) Pour tout ouvert V de X , le faisceau M_V est $f_!$-acyclique

Δ Pour le démontrer, il suffit d'écrire les isomorphismes évidents

$$(R^n f_! M_V)_y \approx H_c^n(f^{-1}(y), M_V) \approx H_c^n(V \cap f^{-1}(y), M|V \cap f^{-1}(y))_V$$

4 . Hypothèses de finitude . Applications .

a)

4.1. Proposition

Supposons que $dch_! f = n < +\infty$. Tout faisceau M sur X admet une résolution $f_!$-molle finie .

Δ En effet, on peut, en tout état de cause, trouver pour tout faisceau M , une résolution $f_!$-molle (peut être infinie!) :

$$0 \to M \to M^0 \to M^1 \to \ldots \to M^{n-2} \xrightarrow{\varphi} M^{n-1} \to M^n \to M^{n+1} \to \ldots$$

Soit $N^n = \operatorname{coker} \varphi$. D'après l'hypothèse $dch_! f = n$ et la $f_!$-acyclicité des M_V^i pour tout ouvert V de X ; (théorème 3.3) on obtient que N_V^n est $f_!$-acyclique pour tout V et que par conséquent la suite

$$0 \to M \to M^0 \to M^1 \to \ldots \to M^{n-2} \xrightarrow{\varphi} M^{n-1} \to N^n \to 0$$

est une résolution $f_!$-molle de M, de longueur n. ∇

4.1.1. Application .

Si $f_!$ est de dimension cohomologique finie on sait définir le foncteur

$$R f_! : D(X_A) \longrightarrow D(Y_A)$$

qui prolonge $R^+ f_!$ défini en 1. c) .

b) Propriétés de R .

α) Suite spectrale de composition .

4.2. Proposition .

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite d'applications continues d'espaces localement compacts . Supposons que $f_!$ et $g_!$ soient de dimension cohomologique finie ; alors le morphisme canonique

$$\zeta : R(gf)_! \longrightarrow R g_! R f_!$$

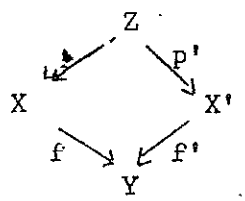
est un isomorphisme .

Δ Comme le corollaire 1.4.1. ∇

β) Formule du changement de base .

4.3. Proposition .

Soit



un diagramme cartésien d'applications continues d'espaces topologiques localement compacts . Supposons que $f_!$ est de dimension cohomologique finie . Alors le morphisme canonique (voir 1 , d))

$$\psi : f'^* R f_! \longrightarrow R p'_! p^*$$

est un isomorphisme . (Vrai encore si on ne fait plus d'hypothèse de dimension sur f , à condition de mettre R^+ au lieu de R) .

Remarque : Si $f_!$ est de dimension cohomologique finie, $p_!$ l'est aussi !

Δ Si on remarque que la source et le but de ψ sont "way out" des deux côtés [H] , on est ramené à démontrer la formule sur la sous-catégorie des complexes de $D(X_A)$ réduits à un seul faisceau, ce qui a été fait au théorème 1.3. ∇

γ) Formule de projection .

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une application continue d'espaces localement compacts . Nous pouvons définir un morphisme fonctoriel en le faisceau F sur X et le faisceau G sur Y

$$\Pi^\circ : f_!(F) \underset{Y}{\otimes} G \longrightarrow f_!(F \underset{X}{\otimes} f^*G) \quad ;$$

pour un ouvert U de Y

$$\Pi^\circ(U) : f_!(F)(U) \underset{Y}{\otimes} G(U) \longrightarrow \Gamma_{\Phi(U)}(f^{-1}(U), F \otimes f^* G)$$

est défini par le produit tensoriel des sections .

Cela étant , on a le lemme

4.4.1. Lemme .

Π° est un isomorphisme lorsque G est plat (i.e. à fibres plates) . Si, de plus, F est $f_!$-mou , $F \otimes f^* G$ est $f_!$-mou .

Δ Il suffit de vérifier cet énoncé, fibre par fibre, ou encore se placer dans le cas où Y est réduit à un point . Comme G est alors limite inductive filtrante de modules libres [1] , le résultat suit immédiatement . ∇

Remarque : Lorsque $G = A_U$, l'isomorphisme Π^o n'est autre que celui déduit de 1.3.1 par prolongement par zéro en dehors de U et $f^{-1}(U)$.

4.4. Proposition .

λ) Le morphisme Π^o définit un isomorphisme de foncteurs

$$(\lambda) \qquad \Pi^+ : R^+f_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} G^\cdot \longrightarrow R^+f_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^*G^\cdot)$$

pour tout $F^\cdot \in D^+(X_A)$ et tout $G^\cdot \in D^b_{\mathrm{Tor\ dim} < +\infty}(Y_A)$.

μ) L'isomorphisme Π^+ se prolonge, lorsque $\mathrm{dch}_! f$ est finie , en un isomorphisme

$$(\mu) \qquad \Pi : Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} G^\cdot \longrightarrow Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^*G^\cdot)$$

pour tout $F^\cdot \in D(X_A)$ et tout $G^\cdot \in D^-(Y_A)$.

ν) Si $\mathrm{dch}_! f$ est finie et si A est noethérien, l'isomorphisme Π se prolonge en un isomorphisme (encore noté Π)

$$(\nu) \qquad \Pi : Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} G^\cdot \longrightarrow Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^*G^\cdot)$$

pour $F^\cdot \in D^-(X_A)$ et tout $G^\cdot \in D(Y_A)$.

ρ) Si $\mathrm{dch}_! f$ est finie et si A est noethérien régulier, l'isomorphisme Π ci-dessus se prolonge en un isomorphisme

$$(\rho) \qquad \Pi : Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} G^\cdot \longrightarrow Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^*G^\cdot)$$

pour tout $F^\cdot \in D(X_A)$ et tout $G^\cdot \in D(Y_A)$.

Introduisons les sous-catégories de $K(X_A)$

- $K_p(X_A)$ formée des complexes de faisceaux plats
- $K_M(X_A)$ formée des complexes de faisceaux $f_!$-mous
- $K_{p,M}(X_A) = K_p(X_A) \cap K_M(X_A)$.

Δ On va démontrer μ) ; on sait que $K_M(X_A)/_{(qis)}$ (complexes de faisceaux $f_!$-mous à quasi-isomorphisme près est une catégorie équivalente à $D(X_A)$. De même, $K_p^-(Y_A)/_{(qis)}$ (complexes de faisceaux limités supérieurement , plats, à quasi-isomorphisme près) est équivalente à $D^-(Y_A)$. (cf. Hartshorne [H], chap. 1 , § 5 et ce séminaire) . Soit $F^\cdot$ un complexe de faisceaux $f_!$-mous et $G^\cdot$ un complexe borné supérieurement de faisceaux plats . D'après le lemme 4.4.1 et le fait que $f_!$ commute aux sommes directes un isomorphisme est défini par Π° :

$$* \qquad f_!(F^\cdot) \underset{Y}{\otimes} G^\cdot \longrightarrow f_!(F^\cdot \underset{X}{\otimes} f^*G^\cdot) \ .$$

Le premier membre se factorise par

$$D(X_A) \times D^-(Y_A) \longrightarrow D(Y_A)$$
$$(F^\cdot , G^\cdot) \longmapsto Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} G^\cdot \ .$$

De même, pour le second membre, par

$$D(X_A) \times D^-(Y_A) \longrightarrow D(Y_A)$$
$$(F^\cdot , G^\cdot) \longmapsto Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^*G^\cdot)$$

d'où l'isomorphisme cherché . On construirait de la même manière Π^+ et Π dans les cas λ) et ρ) à condition cependant de modifier les conditions sur les limitations des complexes .

Démontrons maintenant ν) . Il résulte de la partie μ) que pour tout faisceau F $f_!$-mou et plat, tout ouvert V de X et tout faisceau G sur Y

$$R^i f_!(F_V \underset{X}{\otimes} f^* G) = 0 \qquad i > 0$$

ce qui montre que $F \underset{X}{\otimes} f^* G$ est $f_!$-mou et plat . ($f_!$-mou d'après $(F \underset{X}{\otimes} f^* G)_V \approx F_V \underset{X}{\otimes} f^* G$ et le théorème 3.3 , plat car on peut prendre une résolution plate de G .) De même $\mu)$ montre en plus que dans ce cas $f_!(F)$ est plat . Si on démontre que $K^-_{p,M}(X_A)/_{(qis)}$ est équivalente à la catégorie $D^-(X_A)$, on a gagné car on peut définir comme en $\mu)$ un isomorphisme Π qui coïncidera d'ailleurs avec celui de $\rho)$ lorsque $G^\circ \in D^-(Y_A)$. Mais on sait déjà que $K^-_p(X_A)/_{(qis)}$ est équivalente à $D^-(X_A)$. Il nous suffit donc de démontrer que le foncteur canonique d'inclusion

$$K^-_{p,M}(X_A)/(qis) \longrightarrow K^-_p(X_A)/(qis)$$

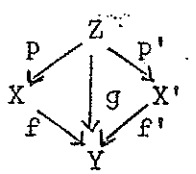
est une équivalence . Mais cela résulte immédiatement du fait que tout faisceau plat se plonge dans un faisceau $f_!$-mou et plat (si A est noethérien) : tout faisceau F sur X se plonge dans le faisceau $f_!$-mou (car flasque) $\hat{F} = \prod_{x \in X} F_x$ si de plus F est plat pour tout ouvert V de X $\hat{F}(V) = \prod_{x \in V} F_x$ est un module plat, si bien que les fibres de $\hat{F}$ sont plates (Une limite inductive de modules plats est plate !) . ∇

δ) Formule de Künneth .

Nous allons énoncer et démontrer un corollaire de l'assertion $\rho)$ de la proposition 4.4. Le lecteur est invité à écrire lui-même les formules que l'on pourrait déduire de λ , μ , ν , ρ .

4.5. Proposition .

Soit



un diagramme cartésien d'applications continues d'espaces topologiques localement

compacts . Supposons que $f_!$ et $f_!'$ soient de dimension cohomologique finie . Alors il y a un isomorphisme canonique

$$K\ddot{u} \ : \ Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} Rf_!'(G^\cdot) \xrightarrow{\sim} Rg_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\cdot)$$

pour $F \in D^-(X_A)$ et $G \in D^-(X_A')$.

Remarque : Le complexe $F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G^\cdot$ sur Z n'est autre que le complexe $p^*F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{Z}{\otimes}} p'^*G^\cdot$.

Δ Il suffit d'écrire la suite d'isomorphismes

$$Rf_!(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{Y}{\otimes}} Rf_!'(G^\cdot)$$

$$\downarrow \ \text{§§} \qquad \text{défini par 4.4 } \mu)$$

$$Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} f^* Rf_!'(G^\cdot))$$

$$\downarrow \ \text{§§} \qquad \text{défini par 4.3}$$

$$Rf_!(F^\cdot \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} Rp_!p'^*(G^\cdot))$$

$$\downarrow \ \text{§§} \qquad \text{défini par 4.4 } \mu)$$

$$Rf_!(Rp_!(p^*(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} p'^*(G^\cdot)))$$

$$\downarrow \ \text{§§} \qquad \text{défini par 4.2}$$

$$Rg_!(p^*(F^\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\underset{X}{\otimes}} p'^*(G^\cdot))$$

∇

BIBLIOGRAPHIE

[G] GODEMENT R. Théorie des faisceaux (Hermann) .

[H] HARTSHORNE'S Seminar on "Residues and Duality" Harvard . (Springer) .

[1] LAZARD Daniel (C.R.A.S. t. 258 , p. 6313) .

-:-:-:-

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966-67

Exposé 4

THEOREME DE DUALITE POUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

La lettre A désigne un anneau non nécessairement commutatif .

1 . Une propriété d'adjonction .

1.0. Lemme .

Soit X' un espace topologique, X'_A la catégorie des faisceaux de A-modules à gauche,

$$\mu : X'_A \to (Ab)^\circ$$

un foncteur (contravariant) à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens (appartenant à un univers convenable). Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) μ est représentable i.e. il existe un isomorphisme fonctoriel

$$F \in \mathrm{Ob}\, X'_A \qquad \mu(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X_A}(F, h_\mu) .$$

ii) Le foncteur μ transforme les limites inductives en limites projectives i.e. transforme sommes directes en produits et est exact à droite.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale ; démontrons (ii) $\Rightarrow$ (i) .

Tout d'abord pour tout ouvert $U \subset X'$ le faisceau A_U est un faisceau de A-bimodules et par suite l'anneau A opère à droite sur l'objet A_U de X'_A . Le groupe abélien $\mu(A_U)$ est donc muni naturellement d'une structure de A-module à gauche et pour tout $U \subset U' \subset X'$ le morphisme

$$\mu(A_{U'}) \longrightarrow \mu(A_U) ,$$

provenant de l'injection canonique $A_U \hookrightarrow A_{U'}$ est un morphisme de A-modules à gauche. On a ainsi défini un préfaisceau de A-modules à gauche :

$$h_\mu \; : \; h_\mu(U) = \mu(A_U) \; .$$

Le préfaisceau h_μ est un faisceau. En effet soient $\mu(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et $V = \bigcup_{i\in I} U_i$. On a une suite exacte de faisceaux :

$$(*) \qquad \bigoplus_{i,j\in I} A_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{(2)} \bigoplus_{i\in I} A_{U_i} \xrightarrow{(1)} A_V \longrightarrow 0$$

où les morphismes (1) et (2) sont définis à l'aide des injections canoniques $A_{U_i} \to A_V$, $A_{U_i\cap U_j} \to A_{U_i}$, $A_{U_i\cap U_j} \to A_{U_j}$. Le foncteur μ commute aux limites inductives. Il transforme donc la suite exacte (*) en la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu(A_V) \longrightarrow \prod_i \mu(A_{U_i}) \longrightarrow \prod_{i,j} \mu(A_{U_i\cap U_j})$$

i.e. :

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow h_\mu(V) \longrightarrow \prod_i h_\mu(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} h_\mu(U_i\cap U_j) \; .$$

La suite (**) exprime précisément que h_μ est un faisceau.

Introduisons alors une catégorie I. Les objets de I sont les couples (U,a_U) où U est un ouvert de X' et a_U un élément de $\mu(A_U)$. Soient (U,a_U) et (V,a_V) deux objets de I. Un morphisme dans I de (U,a_U) dans (V,a_V) est un morphisme de faisceaux

$$f \; : \; A_U \longrightarrow A_V \; .$$

tel que

$$\mu(f)(a_V) = a_V \; .$$

Soit $p : I \to X'_A$ le foncteur qui associe à tout objet (U,a_U) le faisceau A_U. Pour tout objet (U,a_U) de I, l'élément a_U définit un morphisme de faisceaux

$$[a_U] \; : \; A_U \longrightarrow h_\mu$$

i.e. un élément de $h_\mu(U) = \mu(A_U)$. Les morphismes $[a_U]$ définissent un morphisme du foncteur p dans le foncteur constant de valeur h_μ d'où un morphisme

$$[a] : \varinjlim_I p \longrightarrow h_\mu \ .$$

et ce morphisme est clairement un isomorphisme.

Comme le foncteur μ transforme les limites inductives en limites projectives on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mu[a] : \mu(h_\mu) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_I \mu \circ p \ .$$

Pour tout objet (U,a_U) de I , on a un élément canonique de $u \circ p(U,a_U) = \mu(A_U)$ à savoir précisément l'élément a_U . De plus pour tout morphisme $f : (U,a_U) \to (V,a_V)$ de I ,

$$\mu \circ p(f)(a_V) = \mu(f)(a_V) = a_U \ ,$$

et par suite la famille des éléments a_U définit un élément $e_\mu \in \mu(h_\mu)$ dans la limite projective. Cet élément e_μ possède évidemment la propriété suivante :

(***) Pour tout morphisme $m : A_U \to h_\mu$ i.e. pour toute section $s_m \in h_\mu(U)$:

$$\mu(m)(e_\mu) = s_m \ .$$

L'élément $e_\mu \in \mu(h_\mu)$ permet de définir un morphisme fonctoriel en F :

$$[e_\mu]_F : \mathrm{Hom}_{X'_A}(F,h_\mu) \longrightarrow \mu(F)$$

par $$[e_\mu]_F(m) = \mu(m)(e_\mu) \qquad \forall\, m \in \mathrm{Hom}_{X'_A}(F,h_\mu)$$

La propriété (***) montre que les morphismes $[e_\mu]_{A_U}$ sont des isomorphismes pour tout ouvert $U \subset X'$.

Comme tout faisceau F est une limite inductive de faisceaux A_U

suivant des catégories convenables et que les foncteurs $\mathrm{Hom}_{X'_A}(\ ,h_\mu)$ et $\mu(\cdot)$ transforment les limites inductives en limites projectives, le morphisme $[e_\mu]_F$ est un isomorphisme pour tout faisceau F .

c.q.f.d.

1.1. Proposition .

Soient X' un espace topologique, X'_A la catégorie des faisceaux de A-modules à gauche sur X' , B une catégorie abélienne,

$$\Lambda : X'_A \longrightarrow B ,$$

un foncteur. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur Λ admet un adjoint à droite i.e. il existe un foncteur $\Xi : B \to X'_A$ et un isomorphisme bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{X'_A}(F,\Xi(G)) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Lambda(F),G) .$$

(ii) Le foncteur Λ commute aux limites inductives i.e. il transforme les sommes directes en sommes directes et est exacte à droite .

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente. Pour démontrer (ii) $\Rightarrow$ (i) il suffit de remarquer que pour tout objet G de B le foncteur $F \mapsto \mathrm{Hom}_B(\Lambda(F),G)$ transforme limites inductives en limites projectives et est pas suite représentable (1.0.) par un objet $\Xi(G)$ qui dépend fonctoriellement de G .

c.q.f.d.

1.2. Proposition .

Soient X et Y deux espaces localement compacts, $f : X \to Y$ une application continue de A-dimension cohomologique fini (Exposé 3) , K un faisceau sur X de A-bimodules $f_!$-mou [loc. cit.] et A-plat (à droite) . Le foncteur

$$f_!^K : X_A \longrightarrow Y_A .$$

$$f_!^K(F) = f_!(K \underset{A}{\otimes} F)$$

est exact et commute aux limites inductives. Il admet un adjoint à droite :

$$f_K^! : Y_A \longrightarrow X_A \ .$$

Le foncteur $f_K^!$ est exact à gauche et transforme les faisceaux injectifs de Y_A en faisceaux injectifs de X_A .

1.3. Lemme .

Pour tout faisceau F de X_A le faisceau $K \underset{A}{\otimes} F$ est $f_!$-mou .

En effet le faisceau F admet une résolution du type :

$$\cdots\cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{d_2} L_1 \xrightarrow{d_1} L_o \xrightarrow{\varepsilon} F \longrightarrow 0 \ ,$$

où les faisceaux L_i sont isomorphes à des faisceaux du type $\coprod_j A_{U_j}$. Le faisceau K étant plat, le complexe :

$$\cdots\cdots \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} L_2 \xrightarrow{1\otimes d_2} K \underset{A}{\otimes} L_1 \xrightarrow{1\otimes d_1} K \underset{A}{\otimes} L_o \xrightarrow{1\otimes \varepsilon} K \underset{A}{\otimes} F \longrightarrow 0 \ ,$$

est acyclique. De plus pour tout i , le faisceau $K \underset{A}{\otimes} L_i$ est isomorphe à un faisceau du type $K \underset{A}{\otimes} \coprod_j A_{U_j} \simeq \coprod_j K_{U_j}$ et est par suite (exposé 3) $f_!$-mou .

Soit n la A-dimension cohomologique de l'application f (exposé 3) .
Dans le complexe :

$$0 \longrightarrow \ker(1 \otimes d_n) \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} L_n \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} L_o \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} F \longrightarrow 0 \ ,$$

le faisceau $K \underset{A}{\otimes} F$ apparaît comme le dernier terme d'une résolution de longueur $n+1$ du faisceau $\ker(1 \otimes d_n)$ dont tous les termes intermédiaires sont $f_!$-acycliques. Le faisceau $K \underset{A}{\otimes} F$ est donc $f_!$-acyclique. Le même raisonnement s'applique lorsqu'on remplace le faisceau F par le faisceau F_V où $V \subset X$ est un ouvert quelconque de X .

Par suite, pour tout ouvert V, le faisceau $K \underset{A}{\otimes} F_V \simeq (K \underset{A}{\otimes} F)_V$ est $f_!$-acyclique. Il est donc $f_!$-mou (exposé 3).

Reprenons la démonstration de la proposition 1.3.. Montrons que le foncteur $f_!^K$ est exact. Pour toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

de faisceaux de A-modules à gauche, la suite :

$$0 \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} F' \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} F \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} F'' \longrightarrow 0$$

est exacte et ses termes sont $f_!$-mous. Donc la suite :

$$0 \longrightarrow f_!^K(F') \longrightarrow f_!^K(F) \longrightarrow f_!^K(F'') \longrightarrow 0 \ ,$$

est exacte.

Enfin, il est clair que le foncteur $F \longmapsto f_!^K(F)$, composé de deux foncteurs qui commutent aux sommes directes, commute aux sommes directes.

Il résulte alors de la proposition 1.1. que le foncteur $f_!^K$ admet un adjoint à droite

$$f_K^! : Y_A \longrightarrow X_A \ .$$

Ce foncteur étant un adjoint à droite est exact à gauche.

Enfin lorsque $G \in \mathrm{Ob}\, Y_A$ est injectif le foncteur :

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{X_A}(F, f_K^!(G)) \ ,$$

isomorphe au foncteur :

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(F), G)$$

est exact. Par suite $f_K^!(G)$ est un objet injectif de X_A.

C.Q.F.D.

1.4. Remarque .

Pour obtenir le résultat de la proposition 1.2., on a, en fait, utilisé la propriété suivante du faisceau K :

(P) Le faisceau K est plat et pour tout faisceau F , le faisceau $K \underset{A}{\otimes} F$ est $f_!$-acyclique .

Un tel faisceau est alors nécessairement plat et $f_!$-mou (exposé 3) . Mais sans hypothèse supplémentaire (par exemple A-dch(f) finie) le rédacteur ne sait pas démontrer que la réciproque est vraie (1.3.) . Cependant on peut montrer que lorsque l'anneau A est noethérien à gauche de dimension cohomologique globale (à gauche) finie, tout faisceau plat et $f_!$-mou possède la propriété (P) . Pour démontrer cela on utilise les techniques de l'exposé 2 .

1.5. On reprend les hypothèses de (1.2.) . Le foncteur $f_K^!$ étant adjoint à droite au foncteur $f_!^K$, on a un isomorphisme bifonctoriel :

$$\delta_K(F,G) : \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(F),G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X_A}(F,f_K^!(G)) .$$

Lorsque $F = f_K^!(G)$, on obtient un isomorphisme :

$$\delta_K(f_K^!(G),G) : \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K f_K^!(G),G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X_A}(f_K^!(G),f_K^!(G)) ;$$

d'où un morphisme de faisceaux :

$$\varphi_G : f_!^K f_K^!(G) \longrightarrow G ,$$

obtenu en prenant l'image par $\delta_K(f_K^!(G),G)$ du morphisme identique de $f_K^!(G)$. Le morphisme φ_G est fonctoriel en G et définit donc un morphisme de foncteurs :

$$\varphi : f_!^K f_K^! \longrightarrow \mathrm{id}_{Y_A} ,$$

appelé le morphisme d'adjonction .

Réciproquement la connaissance du morphisme φ permet de reconstituer les isomorphismes $\delta_K(F,G)$ grâce au diagramme commutatif :

1.5.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{X_A}(F, f_K^!(G)) & \xrightarrow{\text{"}f_!^K\text{"}} & \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(F), f_!^K f_K^!(G)) \\ & \searrow^{\delta_K(F,G)} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(F), \varphi_G)} \\ & & \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(F), G) \end{array} .$$

Soit $\sigma : A \to K$, un morphisme de faisceaux de A-bimodule sur X i.e. une section sur X du faisceau K . Pour tout faisceau F sur X , le morphisme σ permet de définir un morphisme de faisceaux :

$$F \xrightarrow{\sigma \otimes id_F} K \underset{A}{\otimes} F \quad ;$$

d'où un morphisme de faisceaux sur Y :

$$f_!(\sigma)_F \; : \; f_!(F) \longrightarrow f_!^K(F) \quad ,$$

fonctoriel en F . En particulier pour tout faisceau G de Y_A on a une suite de morphismes:

$$f_! f_K^!(G) \xrightarrow{f_!(\sigma)_{f_K^!(G)}} f_!^K f_K^!(G) \xrightarrow{\varphi_G} G \quad .$$

Désignons par $\psi_G(\sigma)$ le morphisme composé :

$$\begin{cases} \psi_G(\sigma) = \varphi_G \circ f_!(\sigma)_{f_K^!(G)} \\ \psi_G(\sigma) \; : \; f_! f_K^!(G) \longrightarrow G \quad . \end{cases}$$

On obtient un morphisme fonctoriel en G . Ce morphisme de faisceau induit pour tout ouvert $U \subset Y$ un morphisme de A-modules à gauche :

1.5.2. $$\psi_G(\sigma)(U) : f_! f_K^!(G)(U) \longrightarrow G(U) \quad .$$

Par ailleurs le faisceau $f_K^!(G)$ est canoniquement isomorphe au faisceau (cf. 1.0.) :

$$V \text{ ouvert de } X \qquad V \longmapsto \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_V), G) \quad .$$

L'isomorphisme canonique étant défini par les isomorphismes :

1.5.3. $$\delta_K(A_V, G) : \mathrm{Hom}_{X_A}(A_V, f_K^!(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_V), G) \quad .$$

On se propose de donner dans les numéros suivants (1.6., 1.7., 1.8., 1.9.) une description des morphismes (1.5.2.) à partir des isomorphismes (1.5.3.) qui définissent le faisceau $f_K^!(G)$.

1.6. Pour donner cette description nous allons tout d'abord introduire quelques notations. Soit $s \in f_! f_K^!(G)(U)$. Un tel élément est par définition une section du faisceau $f_K^!(G)$ sur $f^{-1}(U)$ dont le support $|s|$ est propre sur U . On a donc, pour tout fermé $|s|$ de $f^{-1}(U)$ propre sur U , un homomorphisme injectif :

1.6.1. $$i_{|s|} : \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G)) \longrightarrow f_! f_K^!(G)(U)$$

qui associe à tout élément de $\mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G))$ i.e. à toute section de $f_K^!(G)$ sur $f^{-1}(U)$ à support contenu dans $|s|$ (exposé 1), l'élément correspondant de $f_! f_K^!(G)(U)$.

Remarquons d'ailleurs que le A-module $f_! f_K^!(G)(U)$ est canoniquement isomorphe à $\varinjlim_{|s|} \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G))$, l'isomorphisme étant défini par les injections $i_{|s|}$. Pour décrire le morphisme 1.5.2. :

$$\psi_G(\sigma)(U) : f_! f_K^!(G)(U) \longrightarrow G(U) \quad ,$$

il suffit donc de décrire pour tout fermé $|s|$ de $f^{-1}(U)$ le morphisme composé :

$$\mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G)) \xrightarrow{i_{|s|}} f_! f_K^!(G)(U) \xrightarrow{\psi_G(\sigma)(U)} G(U) \quad .$$

Par ailleurs la section $\sigma : A \to K$ définit, par restriction, pour tout fermé $|s|$ de $f^{-1}(U)$ propre sur U, une section $\sigma_{|s|}$ du faisceau $K_{|s|}$ sur $f^{-1}(U)$ dont le support est contenu dans $|s|$. La section $\sigma : A \to K$ permet donc de définir un élément encore noté $\sigma_{|s|}$ de $f_!(K_{|s|})(U)$. Pour tout faisceau G sur Y on a donc un homomorphisme canonique :

1.6.2. $$e(\sigma, |s|) : \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{|s|}), G) \longrightarrow G(U) \ ,$$

qui associe à tout morphisme $m : f_!^K(A_{|s|}, G) \longrightarrow G$, l'élément de $G(U)$ transformée par m de l'élément $\sigma_{|s|} \in f^!(K_{|s|})(U)$.

1.7. Proposition.

Pour tout ouvert U de Y, tout fermé $|s|$ de $f^{-1}(U)$ propre sur U, tout morphisme $\sigma : A \longrightarrow K$, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_! f_K^!(G)(U) & \xrightarrow{\psi_G(\sigma)(U)} & G(U) \\ \uparrow{\scriptstyle i_{|s|}} & & \uparrow{\scriptstyle e(\sigma,|s|)} \\ \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G)) & \xrightarrow{\delta_K(A_{|s|}, G)} & \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{|s|}), G) \end{array} \quad .$$

Preuve : a) - Introduisons tout d'abord le morphisme :

$$\mathrm{can} : A_U \longrightarrow f_!(A_{|s|}) \ .$$

Le A-module $f_!(A_{|s|})(U)$ possède en effet un élément canonique : la section unité de $A_{|s|}$ sur $f^{-1}(U)$ qui est bien une section de $A_{|s|}$ sur $f^{-1}(U)$ dont le support $|s|$ est propre sur U. Cet élément canonique définit

donc un morphisme de A_U dans $f_!(A_{|s|})$ qui est par définition

$$\text{can} : A_U \longrightarrow f_!(A_{|s|}) \quad .$$

b) - Soit $\alpha : A_{|s|} \to f_K^!(G)$ un morphisme de faisceaux sur X. Le morphisme composé :

$$A_U \xrightarrow{\text{can}} f_!(A_{|s|}) \xrightarrow{f_!(\alpha)} f_! f_K^!(G)$$

définit une section sur U du faisceau $f_! f_K^!(G)$ qui n'est autre que la section $i_{|s|}(\alpha)$ (1.6.1.) ainsi qu'on le vérifie immédiatement. Nous écrirons donc (abusivement) :

1.7.1. $$i_{|s|}(\alpha) = f_!(\alpha) \circ \text{can}$$

(l'abus consiste à identifier les sections d'un faisceau G sur un ouvert U avec les homomorphismes de A_U dans G. Nous ferons systématiquement cet abus dans la suite).

c) - Par définition 1.5.2. on a l'égalité :

$$\psi_G(\sigma)(U)(i_{|s|}(\alpha)) = \varphi_G \circ f_!(\sigma \underset{A}{\otimes} \mathrm{id}_{f_K^!(G)})(U)\ (i_{|s|}(\alpha)) \ ;$$

d'où, en utilisant 1.7.1., l'égalité :

1.7.2. $$\varphi_G \circ f_!(\sigma \underset{A}{\otimes} \mathrm{id}_{f_K^!(G)}) \circ f_!(\alpha) \circ \text{can} = \psi_G(\sigma)(U)(i_{|s|}(\alpha)) \quad .$$

d) - On a un diagramme commutatif de faisceaux de A-modules sur X :

$$\begin{array}{ccc} A_{|s|} & \xrightarrow{\alpha} & f_K^!(G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{|s|}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma \underset{A}{\otimes} \mathrm{id}_{f_K^!(G)}} \\ K_{|s|} & \xrightarrow[\mathrm{id}_K \underset{A}{\otimes} \alpha]{} & K \underset{A}{\otimes} f_K^!(G) \end{array} \quad ;$$

d'où, en utilisant la fonctorialité de $f_!$ et 1.7.2. , l'égalité :

1.7.3. $$\varphi_G \circ f_!(id_K \underset{A}{\otimes} \alpha) \circ f_!(\sigma_{|s|}) \circ can = \psi_G(\sigma)(U)(i_{|s|}(\alpha))$$

e) - Le diagramme commutatif 1.5.1. (dans lequel on pose $F = A_{|s|}$) fournit l'égalité :

$$\varphi_G \circ f_!(id_K \underset{A}{\otimes} \alpha) = \delta_K(A_{|s|}, G)(\alpha) : f_!^K(A_{|s|}) \longrightarrow G .$$

D'où en reportant dans 1.7.3. :

1.7.4. $$\delta_K(A_{|s|}, G)(\alpha) \circ f_!(\sigma_{|s|}) \circ can = \psi_G(\sigma)(U)(i_{|s|}(\alpha)) .$$

f) - Il résulte immédiatement de la définition 1.6.2. du morphisme :

$$e(\sigma, |s|) : \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{|s|}), G) \longrightarrow G(U) ,$$

que pour tout $\beta : f_!^K(A_s) = f_!(K_{|s|}) \longrightarrow G$, on a :

$$e(\sigma, |s|)(\beta) = \beta \circ f_!(\sigma_{|s|}) \circ can .$$

En appliquant ce résultat au cas $\beta = \delta_K(A_{|s|}, G)(\alpha)$ et en reportant dans 1.7.4. on obtient

1.7.5. $$e(\sigma, |s|)(\delta_K(A_{|s|}, G)(\alpha)) = \psi_G(\sigma)(U)(i_{|s|}(\alpha)) .$$

C.Q.F.D.

1.8. Pour remplir le programme annoncé en 1.5., il reste à relier les isomorphismes $\delta_K(A_{|s|}, G)$ aux isomorphismes $\delta_K(A_V, G)$ (V ouvert de X) . Ceci est fait dans la proposition suivante :

1.9. Proposition .

Pour tout ouvert U *de* Y , *tout fermé* $|s|$ *de* $f^{-1}(U)$ *propre sur* U , *on a un diagramme commutatif où les lignes sont exactes* :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!(G)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{f^{-1}(U)}, f_K^!(G)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{X_A}(A_{f^{-1}(U)-|s|}, f_K^!(G)) \\
\downarrow \wr \ \delta_K(A_{|s|}, G) & & \downarrow \wr \ \delta_K(A_{f^{-1}(U)}, G) & & \downarrow \wr \ \delta_K(A_{f^{-1}(U)-|s|}, G) \\
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{|s|}), G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{f^{-1}(U)}), G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{Y_A}(f_!^K(A_{f^{-1}(U)-|s|}), G)
\end{array}$$

Résulte immédiatement de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A_{f^{-1}(U)-|s|} \longrightarrow A_{f^{-1}(U)} \longrightarrow A_{|s|} \longrightarrow 0 \quad .$$

2 . La propriété $\Delta(A)$.

2.1. Définition .

Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces localement compacts. On désigne par $\Delta(A)$ la propriété :

$\Delta(A)$: La A-dimension cohomologique de f est finie (exposé 3). Le faisceau constant A admet une résolution (à droite) de longueur finie par des faisceaux de A-bimodules $f_!$-mous et plats (à droite) .

2.2. Proposition .

Soient A un anneau commutatif, $A \to B$ une A-algèbre. Soit $f : X \to Y$ une application continue possédant la propriété $\Delta(A)$. Alors f possède la propriété $\Delta(B)$.

En effet si la A-dimension cohomologique de f est finie, il en est de même de la B-dimension cohomologique de f (exposé 2) . De plus, soit $A \xrightarrow{\epsilon} K$ une résolutions bornée, f-molle et plate du faisceau constant A . Le morphisme de complexe :

$$B \xrightarrow{id \otimes \epsilon} B \underset{A}{\otimes} K$$

est une résolution bornée, f-molle 1.3. et plate (à droite) du faisceau constant B par des faisceaux de B-bimodules.

C.Q.F.D.

2.3. Proposition .

Soient $f : X \to Y$ une application continue de A-dimension finie (exposé 3 . Lorsque l'anneau A est noethérien à gauche l'application f possède la propriété $\Delta(A)$.

En effet pour tout faisceau F sur X , désignons par $C^o(F)$ le faisceau :

$$C^o(F)(U) = \prod_{x \in U} F_x \quad .$$

et par

$$j(F) : F \longrightarrow C^o(F) \quad .$$

le monomorphisme canonique. (Résolution de Godement) .

Posons alors :

$$C^p(F) = C^o(Z^{p-1}(F)) \quad .$$

$$Z^{p-1}(F) = \text{Coker}(d^{p-2} : C^{p-2}(F) \to C^{p-1}(F))$$

$$\pi^{p-1}(F) = \text{projection canonique } C^{p-1}(F) \to Z^{p-1}(F) \quad .$$

$$d^{p-1}(F) = j(Z^p(F))\ \pi^{p-1}(F)) : C^{p-1}(F) \to C^p(F) \quad .$$

Les relations ci-dessus définissent un complexe de faisceaux flasques :

$$C^\cdot(F) : C^o(F) \xrightarrow{d^o(F)} C^1(F) \longrightarrow \ldots \ ,$$

muni d'une augmentation :

$$F \xrightarrow{J} C^\cdot(F) \quad .$$

Pour tout point x de X , le complexe fibre :

$$f_x \xrightarrow{J_x} C^o(F)_x \longrightarrow C^1(F)_x \longrightarrow \ldots$$

est homotope à zéro [G] .

Lorsque F est un faisceau de A-bimodules le complexe $C^\cdot(F)$ est un complexe de faisceaux de A-bimodules, et de plus lorsque F est plat (à droite) le complexe $C^\cdot(F)$ est un complexe de faisceaux plats. Ceci se démontre par récurrence. Supposons les faisceaux $C^i(F)$ et $Z^i(F)$ plats pour $i < p$. Pour tout ouvert U de X , le bimodule :

$$C^p(F)(U) = \prod_{x \in U} Z^{p-1}(F)_x$$

est plat à droite (A est noethérien à gauche). Par suite pour tout $x \in X$, le bimodule :

$$C^p(F)_x = \varinjlim_{x \in U} C^p(F)(U) \ .$$

est plat et la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow Z^{p-1}(F)_x \longrightarrow C^p(F)_x \longrightarrow Z^p(F)_x \longrightarrow 0$$

montre que le bi-module $Z^p(F)_x$ est plat ce qui achève la démonstration par récurrence.

Soit alors n la A-dimension cohomologique de f (exposé 3) et considérons le complexe de faisceaux :

$$R(A) : C^o(A) \xrightarrow{d^o} C^1(A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow Z^n(A) \longrightarrow 0$$

muni de l'augmentation :

$$J : A \longrightarrow R(A) \ .$$

$R(A)$ est un complexe de faisceaux plats. Pour tout entier $i \leq n-1$ les faisceaux $C^i(A)$ sont flasques donc $f_!$-mous. La dimension de f étant égale à n le faisceau $Z^n(A)$ est lui aussi $f_!$-mou . Par suite $(R(A).J)$ est une résolution du faisceau A par un complexe borné de A-bimodules plats (à droite) et $f_!$-mous .

C.Q.F.D.

2.4. Proposition .

Soient X,Y,Z, trois espaces localement compacts $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues .

$$\begin{array}{c} X \\ f\downarrow \\ Y \\ g\downarrow \\ Z \end{array}$$

1) g et f possèdent la propriété $\Delta(A)$ $\Rightarrow$ gf possède la propriété $\Delta(A)$

2) gf possède la propriété $\Delta(A)$ $\Rightarrow$ f possède la propriété $\Delta(A)$.

Démontrons 1) :

Soit $A \xrightarrow{\epsilon_f} K_f^\cdot$ (resp. $A \xrightarrow{\epsilon_g} K_g^\cdot$) une résolution bornée plate et $f_!$-molle (resp. $g_!$-molle) du faisceau constant A sur X (resp. Y) .

Le complexe simple $g^*(K_g^\cdot) \underset{A}{\otimes} K_f^\cdot = K_{gf}^\cdot$ est un complexe borné de faisceaux plats. Le morphisme de complexes :

$$K_f^\cdot \xrightarrow{g^*(\epsilon_g)\otimes id} g^*(K_g^\cdot) \underset{A}{\otimes} K_f^\cdot$$

est quasi-isomorphisme. Par suite :

$$A \xrightarrow{(g^*(\epsilon_g)\otimes id)\circ\epsilon_f} K_{gf}^\cdot$$

est une résolution bornée et plate du faisceau constant A . Montrons que c'est aussi une résolution $gf_!$-molle. Tout revient à montrer que le faisceau sur X :

$$g^*(N) \underset{A}{\otimes} M$$

est $gf_!$-mou, lorsque M est un faisceau de bi-modules $f_!$-mou sur X et M un faisceau de bi-modules $g_!$-mou et plat à droite sur Y . Il suffit de montrer que pour tout ouvert U de X , le faisceau :

$$(g^*(M) \underset{A}{\otimes} M)_U = g^*(N) \underset{A}{\otimes} M_U$$

est $gf_!$-acyclique (exposé 3). Or le faisceau M_U est $f_!$-mou et par suite, quitte à remplacer M par M_U, il suffit de montrer que :

$$g^*(N) \underset{A}{\otimes} M$$

est $gf_!$-acyclique. La formule de composition (exposé 3) donne :

$$R^+gf_!(g^*(N) \underset{A}{\otimes} M) \simeq R^+g_!(R^+f_!(g^*(N) \underset{A}{\otimes} M)).$$

De plus la formule de projection (exposé 3) fournit un isomorphisme (N est plat) :

$$R^+f_!(g^*(N) \underset{A}{\otimes} M) \simeq N \underset{A}{\otimes} R^+f_!(M) .$$

Comme le faisceau M est $f_!$-mou, $R^+f_!(M) \simeq f_!(M)$. Le faisceau M étant plat et $g_!$-mou et g étant de A-dimension finie, il résulte de (1.3.) que le faisceau $N \underset{A}{\otimes} f_!(M)$ est $g_!$-mou . Par suite :

$$R^+gf_!(g^*(N) \underset{A}{\otimes} M) \simeq gf_!(g^*(N) \underset{A}{\otimes} M) .$$

Le faisceau $g^*(N) \underset{A}{\otimes} M$ est donc $gf_!$-acyclique. Pour achever la démonstration de 1) il suffit de montrer que la A-dimension cohomologique de gf est fini ce qui résulte immédiatement de la formule de composition (exposé 3),

$$R^+gf_! = R^+g_! \circ R^+f_! .$$

Démontrons maintenant la deuxième assertion .

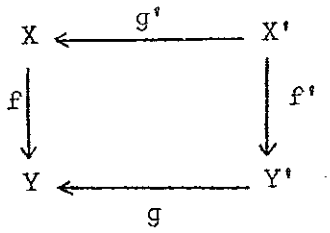
Soit $A \xrightarrow{\varepsilon} K^\cdot_{gf}$ une résolution bornée et $gf_!$-molle et plate. La restriction de $K^\cdot_{gf}$ aux fibres de l'application gf est c-molle. Par suite la restriction de $K^\cdot_{gf}$ aux fibres de l'application f qui sont des fermés contenus dans les fibres de l'application gf, est c-molle. Il en résulte que $K^\cdot_{gf}$ est un complexe, plat et $f_!$ -mou .

Enfin un raisonnement analogue montre que la A-dimension cohomologique de f est bornée.

C.Q.F.D.

2.5. Proposition .

Soit :



un carré cartésien d'espace localement compact. Si l'application f possède la propriété $\Delta(A)$, l'application f' possède la propriété $\Delta(A)$.

En effet, il résulte de l'exposé 3 que la dimension cohomologique de f' est majorée par la dimension cohomologique de f . De plus, si $A \xrightarrow{\varepsilon} K_f^\circ$ est une résolution bornée plate et f-molle du faisceau constant A sur X , $A \xrightarrow{g'^*(\varepsilon)} g'^*K_f^\circ$ est une résolution bornée plate et $f'_!$-molle du faisceau constant A sur X' .

C.Q.F.D.

3 . Théorème de dualité (Forme globale) .

3.1. Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces localement compacts. Lorsque la A-dimension cohomologique de f est fini le foncteur dérivé total de f est défini sur la catégorie $D(X_A)$ catégorie dérivée des complexes de faisceaux sur X bornés ou non [4] :

$$R f_! : D(X_A) \longrightarrow D(Y_A)$$

Il transforme les objets de $D^*(X_A)$ en objets de $D^*(Y_A)$ $(* = +, \ldots, b)$.

3.2. Théorème .

Lorsque l'application f possède la propriété $\Delta(A)$ 2.1., il existe un foncteur, et un seul à isomorphisme unique près :

$$f_+^! : D^+(Y_A) \longrightarrow D^+(X_A) .$$

Muni d'un isomorphisme bifonctoriel :

$$\Delta_f(F,G) : R\,Hom(R\,f_!\,F,G) \xrightarrow{\sim} R\,Hom(F,f_+^!\,G) \quad . \quad (*)$$

$$F \in Ob\ D(X_A) \quad - \quad G \in Ob\ D^+(Y_A) \quad .$$

Lorsque de plus la A-dimension injective des espaces X et Y est finie, (exposé 2), il existe un foncteur, et un seul à isomorphisme unique près :

$$f^! : D(Y_A) \longrightarrow D(X_A)$$

muni d'un isomorphisme bifonctoriel :

$$\Delta_f(F,G) : R\,Hom(R\,f_!\,F,G) \xrightarrow{\sim} R\,Hom(F,f^!\,G) \qquad (**)$$

$$F \in Ob\ D(X_A) \qquad G \in Ob\ D(Y_A) \quad .$$

Démontrons d'abord l'unicité. Lorsqu'on prend la cohomologie de degré zéro des deux membres de (*) (resp. **), on obtient un isomorphisme bifonctoriel

$$\Delta_f^{\varphi}(F,G) : Hom_{D(Y_A)}(R\,f_!\,F,G) \xrightarrow{\sim} Hom_{D(X_A)}(F,f_+^!\,G)$$

$$G \in D^+(Y_A)$$

(resp : $\Delta_f^{\circ}(F,G) : Hom_{D(Y_A)}(R\,f_!\,F,G) \xrightarrow{\sim} Hom_{D(X_A)}(F,f^!\,G)$)

le foncteur $f_+^!$ (resp. $f^!$) apparait alors comme l'adjoint à droite du foncteur $R^+f_!$ (resp. $R\,f_!$) d'où l'unicité .

La démonstration de l'existence occupera les alinéas 3.3., 3.4., 3.5. .

3.3. Démonstration de l'existence (Notations) .

Soit :

$$A \xrightarrow{\varepsilon} K^{\cdot}$$

une résolution bornée du faisceau constant A sur X par des faisceaux $f_!$-mous et plats (à droite) :

$$K^\cdot = K^0 \xrightarrow{d^0_{K^\cdot}} K^1 \xrightarrow{d^1_{K^\cdot}} K^2 \xrightarrow{d^2_{K^\cdot}} \cdots$$

Rappelons 1.2. qu'on désigne par $f_!^{K^i} : X_A \longrightarrow Y_A$, le foncteur $F \longmapsto f_!(K^i \underset{A}{\otimes} F)$. Désignons alors par

$$f_!^{K^\cdot} : X_A \longrightarrow \text{comp } Y_A$$

le foncteur qui associe à tout <u>faisceau</u> F le <u>complexe</u> de faisceaux sur Y :

$$f_!(K^0 \underset{A}{\otimes} F) \xrightarrow{f_!(d^0_{K^\cdot} \underset{A}{\otimes} .)} f_!(K^1 \underset{A}{\otimes} F) \longrightarrow \cdots$$

Désignons ${}^2f_!^{K^\cdot} : \text{comp } X_A \to \text{comp}^2 Y_A$ l'extension du foncteur $f_!^{K^\cdot}$ aux complexes. Le foncteur ${}^2 f_!^{K^\cdot}$ associe à tout complexe de faisceaux $F^\cdot$ sur X le <u>double complexe</u> de faisceaux sur Y dont les composants sont :

$$({}^2f_!^{K^\cdot}(F'))^{p,q} = f_!^{K^p}(F^q)$$

et dont les différentielles proviennent dans la première direction (p) des différentielles de $K^\cdot$ et dans la deuxième direction (q) des différentielles de $F^\cdot$. Enfin désignons encore par

(3.3.1.) $$f_!^{K^\cdot} : \text{comp } X_A \longrightarrow \text{comp } Y_A$$

le foncteur :

$$f_!^{K^\cdot}(F) = \text{complexe simple associé à } {}^2 f_!^{K^\cdot}(F^\cdot) .$$

Rappelons 1.2. qu'on note $f^!_{K^i} : Y_A \longrightarrow X_A$ l'adjoint à droite du foncteur $f_!^{K^i} : X_A \to Y_A$. Les morphismes fonctoriels :

$$f_!(d^i_{K^\cdot} \underset{A}{\otimes} .) : f_!^{K^i} \longrightarrow f_!^{K^{i+1}}$$

fournissent par adjonction des morphismes de foncteurs :

$$f^!_{K^{i+1}} \xrightarrow{(d^i_{K^\cdot})^*} f^!_{K^i} \quad .$$

Désignons alors pour tout faisceau G sur Y par $f^!_{K^\cdot}(G)$ le complexe de faisceaux sur X dont les composants sont :

$$f^!_{K^\cdot}(G)^P = f^!_{K^{-P}}(G) \quad ,$$

et dont les différentielles sont :

$$d^P_{f^!_{K^\cdot}(G)} = (d^{-P-1}_{K^\cdot})^*_G \quad .$$

On a ainsi défini un foncteur :

$$f^!_{K^\cdot} : Y_A \longrightarrow \text{comp } X_A \quad .$$

Soit $G^\cdot$ un complexe de faisceaux sur Y. Désignons par :

$$^2f^!_{K^\cdot} : \text{comp } Y_A \longrightarrow \text{comp}^2 X_A$$

l'extension aux complexes du foncteur $f^!_{K^\cdot}$. Ce foncteur associe donc à tout complexe $G^\cdot$ sur Y un <u>double complexe</u> $^2f^!_{K^\cdot}(G^\cdot)$ dont les composants sont :

$$(^2f^!_{K^\cdot}(G^\cdot))^{p,q} = f^!_{K^{-P}}(G^q) \quad .$$

Enfin notons

3.3.2. $$f^!_{K^\cdot} : \text{comp } Y_A \longrightarrow \text{comp } X_A \quad ,$$

le foncteur obtenu en composant le foncteur $^2f^!_{K^\cdot}$ avec le foncteur complexe simple associé.

3.4. <u>Démonstration de l'existence</u> (suite) .

Soient F' un complexe de faisceaux sur X et G' un complexe de faisceaux sur Y. Notons :

$$\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}(F^{\cdot}, {}^{2}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})) \qquad \mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}({}^{2}f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot})$$

les triples complexes des morphismes. Les composantes en sont :

$$\begin{cases} (\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}(F^{\cdot}, {}^{2}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})))^{p,q,r} = \mathrm{Hom}_{X_A}(F^{-p}, f^{!}_{K^{-q}}(G^{r})) \\ (\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}({}^{2}f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot}))^{q,p,r} = \mathrm{Hom}_{Y_A}(f^{K^{-q}}_{!}(F^{-p}),G^{r}) \end{cases}$$

Les isomorphismes :

3.4.1. $\delta_{K^{-q}}(F^{-p},G^{r}) : (\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}(F^{\cdot}, {}^{2}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})))^{p,q,r} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}({}^{2}f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot}))^{q,p,r}$

commutent aux différentielles des complexes et par suite sont les composants d'un isomorphisme de triples complexes que nous notons :

3.4.2. $${}^{3}\Delta_{K^{\cdot}}(F^{\cdot},G^{\cdot}) : \mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}(F^{\cdot}, {}^{2}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}({}^{2}f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot}) .$$

Désignons maintenant par :

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot},f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})) \qquad (\text{resp. } \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot}))$$

le complexe <u>simple</u> associé au complexe double des morphismes du complexe simple $F^{\cdot}$ (resp. $f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot})$ (3.3.1.)) dans le complexe simple $f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})$ (3.3.2.) (resp. $G^{\cdot}$) .

Le complexe $\mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot}_{!}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot}))$ (resp. $\mathrm{Hom}^{\cdot}(f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot})$) est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe triple $\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}(F^{\cdot}_{!}{}^{2}f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot}))$ (resp. $\mathrm{Hom}^{\cdot\cdot\cdot}({}^{2}f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot})$) . Par suite l'isomorphisme 3.4.2. définit un isomorphisme de complexes simples .

3.4.3. $$\Delta^{\cdot}_{K^{\cdot}}(F^{\cdot},G^{\cdot}) : \mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot},f^{!}_{K^{\cdot}}(G^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^{K^{\cdot}}_{!}(F^{\cdot}),G^{\cdot}) .$$

Explicitons les composants $\Delta^n_{K^\cdot}(F^\cdot,G^\cdot)$ de cet isomorphisme. Pour tout entier n désignons par E_n l'ensemble des triples d'entiers (p,q,r) tels que $p+q+r=n$. On a alors :

$$(\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot, f^!_{K^\cdot}(G^\cdot)))^n = \prod_{(p,q,r)\in E_n} \mathrm{Hom}_{X_A}(F^{-p}, f^!_{K^{-q}}(G^r))$$

$$(\mathrm{Hom}^\cdot(f^{K^\cdot}_!(F^\cdot),G^\cdot))^n = \prod_{(p,q,r)\in E_n} \mathrm{Hom}_{Y_A}(f^{K^{-q}}_!(F^{-p}),G^r) \quad .$$

L'isomorphisme $\Delta^n_{K^\cdot}(F^\cdot,G^\cdot)$ peut alors être défini par une matrice $(a_{(p,q,r),(p',q',r')})$ de type $E_n \times E_n$ dont les termes non diagonaux sont nuls et dont les termes diagonaux sont 3 4.1. :

3.4.4. $$a_{(p,q,r),(p,q,r)} = (-1)^{pq}\, \delta_{K^{-q}}(F^{-p},G^r) \quad .$$

3.5. Démonstration de l'existence (fin) .

Soit $I^+(Y_A)$ (resp. $I(Y_A)$) la sous-catégorie pleine de comp Y_A définie par les complexes bornés inférieurement (resp. sans condition) dont les composants sont des objets injectifs.

Soient $D(Ab)$ la catégorie dérivée de la catégorie des groupes abéliens et :

$$Q_{Ab} : \mathrm{comp}\ Ab \longrightarrow D(Ab) \ ,$$

le foncteur canonique. La formule 3.4.3. permet de définir deux foncteurs :

3.5.1.
$$\begin{cases} \mathrm{comp}\ X_A \times I^+(Y_A) \longrightarrow D(Ab) \\ (F^\cdot,G^\cdot) \longmapsto Q_{Ab}\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot, f^!_{K^\cdot}(G^\cdot)) \\ (F^\cdot,G^\cdot) \longmapsto Q_{Ab}\mathrm{Hom}^\cdot(f^{K^\cdot}_!(F^\cdot),G^\cdot) \end{cases}$$

et un isomorphisme :

3.5.2. $$Q_{Ab}\Delta^{\circ}_{K^{\circ}}(F^{\circ},G^{\circ}) : Q_{Ab}\mathrm{Hom}^{\circ}(F^{\circ},f^{!}_{K^{\circ}}(G^{\circ})) \xrightarrow{\sim} Q_{Ab}\mathrm{Hom}^{\circ}(f^{K^{\circ}}_{!}(F^{\circ}),G^{\circ}) \quad .$$

Les deux foncteurs transforment les quasi-isomorphismes de l'argument G° (i.e. puisque $G^{\circ} \in I^{+}(Y_A)$, les homotopismes de l'argument G°) en isomorphismes de $D(Ab)$. Montrons qu'ils transforment les quasi-isomorphismes de l'argument F° en isomorphismes. En effet soit $F^{\circ} \xrightarrow{m} F^{\circ\prime}$ un quasi-isomorphisme. Comme le complexe $f^{!}_{K^{\circ}}(G^{\circ})$ est un complexe borné inférieurement (K° est borné) dont les composants sont injectifs (1.2.) , le morphisme de complexes :

$$\mathrm{Hom}^{\circ}(m,f^{!}_{K^{\circ}}(G^{\circ})) : \mathrm{Hom}^{\circ}(F^{\circ\prime},f^{!}_{K^{\circ}}(G^{\circ})) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\circ}(F^{\circ},f^{!}_{K^{\circ}}(G^{\circ}))$$

est un quasi-isomorphisme [4] .

Les propriétés universelles des catégories dérivées entrainent alors que les foncteurs (3.5.1.) se factorisent d'une manière unique par la catégorie :

$$D(X_A) \times D^{+}(Y_A) \quad .$$

On se propose d'expliciter ces factorisations .

Soient :

3.5.3. $$\begin{cases} Q_{X_A} : \mathrm{comp}\ X_A \longrightarrow D(X_A) \ . \\ Q_{Y_A} : \mathrm{comp}\ Y_A \longrightarrow D(Y_A) \ . \end{cases}$$

les foncteurs canoniques. Les restrictions des foncteurs Q_{X_A} et Q_{Y_A} aux catégories $I^{+}(X_A)$ et $I^{+}(Y_A)$ (complexes de type injectif) seront encore notées, abusivement, Q_{X_A} et Q_{Y_A} respectivement. Le foncteur $Q_{Y_A} : I^{+}(Y_A) \longrightarrow D^{+}(Y_A)$ est le foncteur composé du foncteur canonique

$I^+(Y_A) \longrightarrow \underline{I}^+(Y_A)$ (complexes de type injectif à homotopie près) et de l'équivalence $\underline{I}^+(Y_A) \xrightarrow{\sim} D^+(Y_A)$.

a) Le foncteur :

$$f^!_{K^\circ} \; : \; I^+(Y_A) \longrightarrow I^+(X_A)$$

passe aux complexes à homotopie près et fournit un foncteur encore noté :

$$f^!_{K^\circ} \; : \; \underline{I}^+(Y_A) \longrightarrow \underline{I}^+(X_A)$$

comme les catégories $\underline{I}^+(Y_A)$ et $\underline{I}^+(X_A)$ sont respectivement équivalentes aux catégories $D^+(Y_A)$, $D^+(X_A)$, il existe un foncteur :

3.5.4. $$f^!_+ : D^+(Y_A) \longrightarrow D^+(X_A)$$

unique à isomorphisme unique près, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} I^+(Y_A) & \xrightarrow{f^!_{K^\circ}} & I^+(X_A) \\ \downarrow{\scriptstyle Q_{Y_A}} & & \downarrow{\scriptstyle Q_{X_A}} \\ D^+(Y_A) & \xrightarrow{f^!_+} & D^+(X_A) \end{array}$$

soit commutatif .

b) Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{comp } X_A & \xrightarrow{f^{K^\circ}_!} & \text{comp } Y_A \\ \downarrow{\scriptstyle Q_{X_A}} & & \downarrow{\scriptstyle Q_{Y_A}} \\ D(X_A) & \xrightarrow[R f_!]{} & D(Y_A) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près .

En effet pour tout complexe $F^\cdot$, on a un morphisme :

$$\epsilon \underset{A}{\otimes} id_{F^\cdot} : F^\cdot \longrightarrow K^\cdot \otimes_A F^\cdot$$

Ce morphisme est un quasi-isomorphisme (car $K^\cdot$ et A sont bornés et plats) du complexe $F^\cdot$ du complexe $F^\cdot$ dans un complexe simple dont les composants sont $f_!$-mous (1.3.) . On en déduit un morphisme de foncteurs.

$$Q_{Y_A} f_!(\epsilon \underset{A}{\otimes} id_{F^\cdot}) : Q_{Y_A} f_!(F^\cdot) \longrightarrow Q_{Y_A} f_!^{K^\cdot}(F^\cdot) \quad .$$

Comme le foncteur $Q_{Y_A} f_!^{K^\cdot}(F^\cdot)$ transforme les quasi-isomorphismes de l'argument $F^\cdot$ en isomorphismes ($f_!$ est de dimension cohomologique finie), il résulte des propriétés universelles du foncteur dérivés, que le morphisme $Q_{Y_A} f_!(\epsilon \underset{A}{\otimes} id_F)$ définit un unique morphisme de foncteurs [H] :

3.5.5. $$R f_! \; Q_{X_A} \longrightarrow Q_{Y_A} f_!^{K^\cdot}$$

et que cet unique morphisme est un isomorphisme [H] .

c) Soient $F^\cdot$ un objet de $D(X_A)$ et $M^\cdot$ un objet de $D^+(X_A)$. Rappelons [H] que $R\,Hom(F^\cdot, M^\cdot)$ est un objet de $D(Ab)$ qu'on peut construire de la manière suivante : Il existe un objet de $W^\cdot$ de $I^+(X_A)$ dont l'image par $Q_{X_A} : I^+(X_A) \longrightarrow D^+(X_A)$ soit isomorphe à $M^\cdot$. L'image par Q_{Ab} : comp Ab $\to D^+$Ab du complexe simple $Hom^\cdot(F^\cdot, W^\cdot)$ est alors canoniquement isomorphe à $R\,Hom(F^\cdot, M^\cdot)$.

Il résulte alors de a), b), c) qu'on a pour tout objet $F^\cdot$ de comp X_A et tout objet $G^\cdot$ de $I^+(Y_A)$ des isomorphismes bifonctoriels :

3.5.6.
$$\begin{cases} Q_{Ab}\, Hom^\cdot(F^\cdot, f_{K^\cdot}^!(G^\cdot)) \overset{(1)}{\simeq} R\,Hom(Q_{X_A} F^\cdot, f_+^!(\quad Q_{Y_A}(G^\cdot))) \\ Q_{Ab}\, Hom^\cdot(f_!^{K^\cdot}(F^\cdot), G^\cdot) \overset{(2)}{\simeq} R\,Hom(R f_!(Q_{X_A} F^\cdot), \quad Q_{Y_A} G^\cdot) \end{cases}$$

Il résulte alors de 3.5.2. et des propriétés universelles des catégories dérivées qu'il existe un isomorphisme bifonctoriel et un seul :

$$3.5.7. \quad \begin{cases} \Delta_f(F^\cdot, G^\cdot) : R\,\mathrm{Hom}(F^\cdot, f_+^!(G^\cdot)) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}(R f_!(F^\cdot), G^\cdot) \\ F^\cdot \in D(X_A) \quad , \quad G^\cdot \in D^+(Y_A) \quad . \end{cases}$$

tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$3.5.8. \quad \begin{array}{ccc} Q_{Ab}\mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot, f_K^{!\cdot}(G^\cdot)) & \xrightarrow{(1)} & R\,\mathrm{Hom}(Q_{X_A}F^\cdot,\ f_+^!(\ Q_{Y_A}G^\cdot\ )) \\ \downarrow\wr\ Q_{Ab}\Delta_K^\cdot(F^\cdot, G^\cdot) & & \wr\downarrow\ \Delta_f(Q_{X_A}F^\cdot,\ Q_{Y_A}G^\cdot) \\ Q_{Ab}\mathrm{Hom}^\cdot(f_!^{K^\cdot}(F^\cdot), G^\cdot) & \xrightarrow{(2)} & R\,\mathrm{Hom}(R f_!(Q_{X_A}F^\cdot),\ Q_{Y_A}G^\cdot) \end{array}$$

$$F^\cdot \in \mathrm{comp}\ X_A \qquad G^\cdot \in I^+(Y_A) \quad .$$

Ceci achève la démonstration de l'existence du foncteur $f_+^!$. Lorsque la A-dimension injective des espaces X et Y est finie on procède de manière analogue. On utilise le fait que dans ce cas, la catégorie des complexes de type injectif de X_A (resp. Y_A) (sans limitation) à homotopie près est équivalente à la catégorie $D(X_A)$ (resp. $D(Y_A)$) .[H] . Les détails sont laissés au lecteur.

3.6. Remarque .

On a donné dans l'exposé oral de ce séminaire un énoncé du théorème de dualité légèrement différent. Lorsqu'on suppose que f est simplement de A-dimension cohomologique finie, hypothèse à priori plus faible que l'hypothèse $A(A)$ (cf. cependant 2.3.), on peut montrer l'existence d'un foncteur

$$f_+^! : D^+(Y_A \longrightarrow D^+(X_A) \quad .$$

tel qu'on ait, pour tout $F^\cdot \in D^-(X_A)$ (et non $D(X_A)$), un isomorphisme :

$$R\,\mathrm{Hom}(F, f_+^!(G)) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}(Rf_!(F), G) .$$

Le caractère encore plus inesthétique des démonstrations, et aussi certaines difficultés dans les questions d'unicité du foncteur $f_+^!$ ont poussé le rédacteur à présenter l'énoncé 3.2. .

4 . Le Morphisme d'Adjonction .

4.1. On reprend les hypothèses et les notations du théorème de dualité 3.2. . Appliquons le théorème 3.2. au cas où $F = f_+^! G$. On obtient un isomorphisme (dans $D(Ab)$) :

$$\Delta_f(f_+^! G, G) : R\,\mathrm{Hom}(f_+^! G, f_+^! G) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}(R f_! f_+^! G, G) .$$

En prenant la cohomologie de degré 0 des deux membres on obtient :

$$\Delta_f^0(f_+^! G, G) : \mathrm{Hom}_{D(X_A)}(f_+^! G, f_+^! G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(Y_A)}(Rf_! f_+^! G, G) :$$

d'où, en prenant l'image du morphisme identique de $f_+^! G$, un morphisme

4.1.1. $$\Phi(f,G) : Rf_! f_+^! G \to G , \qquad G \in \mathrm{Ob}\, D^+(Y_A) ,$$

qu'on appelle le morphisme d'adjonction et qu'on se propose d'étudier dans ce numéro .

4.2. Soient $A \xrightarrow{\varepsilon} K^\cdot$ une résolution finie plate et $f_!$-molle du faisceau constant A sur X, $F^\cdot$ un complexe de faisceaux sur X dont les composants sont $f_!$-mous et $G^\cdot$ un complexe de faisceaux sur Y dont les composants sont injectifs.

On a défini en 3.4.3. un isomorphisme bifonctoriel

$$\Delta_{K^\cdot}^\cdot(F^\cdot, G^\cdot) : \mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot, f_{K^\cdot}^! G^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, G^\cdot)$$

et des isomorphismes (3.5.6.) :

$$Q_{Ab}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot}, f_K^{!\cdot} G^{\cdot}) \xrightarrow{(*)} R\ \mathrm{Hom}(Q_{X_A} F^{\cdot},\ f_+^{!}\ Q_{Y_A}\ G^{\cdot})$$

$$Q_{Ab}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(f_!^{K^{\cdot}} F^{\cdot}, G^{\cdot}) \xrightarrow{(**)} R\ \mathrm{Hom}(R f_!\ Q_{X_A} F^{\cdot}\ ,\ Q_{Y_A}\ G^{\cdot})$$

De plus, il résulte de la démonstration du théorème 3.2. qu'on a un diagramme commutatif (3.5.8.) :

4.2.1.

$$\begin{array}{ccc} Q_{Ab}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot}, f_K^{!\cdot} G^{\cdot}) & \xrightarrow{Q_{Ab}\ \Delta_K^{\cdot\cdot}(F^{\cdot}, G^{\cdot})} & Q_{Ab}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(f_!^{K^{\cdot}} F^{\cdot}, G^{\cdot}) \\ \Big\downarrow (*) & & \Big\downarrow (**) \\ R\ \mathrm{Hom}(Q_{X_A} F^{\cdot}, f_+^{!}\ Q_{Y_A}\ G^{\cdot}) & \xrightarrow{\Delta_f(Q_{X_A} F^{\cdot}, Q_{Y_A} G^{\cdot})} & R\ \mathrm{Hom}(Rf_!\ Q_{X_A} F^{\cdot}, Q_{Y_A}\ G^{\cdot}) \end{array}$$

D'où, en prenant $F^{\cdot} = f_+^{!}(G^{\cdot})$ (complexe dont les composants sont injectifs (1.2.)) et en prenant la cohomologie de degré 0 des deux membres, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Q_{Y_A}\ f_!^{K^{\cdot}} f_K^{!\cdot}\ G^{\cdot} & \xrightarrow{Q_{Y_A}\ \Psi(f, G^{\cdot}, K^{\cdot})} & Q_{Y_A}\ G^{\cdot} \\ \Big\downarrow \wr & \nearrow_{\Phi(f, Q_{Y_A} G^{\cdot})} & \\ R\ f_!\ f_+^{!}\ Q_{Y_A}\ G^{\cdot} & & \end{array}$$

où l'isomorphisme vertical se déduit des isomorphismes (3.5.5.) et (3.5.4.) et où $\Psi(f, G^{\cdot}, K^{\cdot})$ est l'image par

$$\Delta^{\circ}_{K^{\circ}}(f^{!}_{K}\cdot G^{\circ},G^{\circ}) : \mathrm{Hom}^{\circ}_{\mathrm{comp}\ X_A}(f^{!}_{K}\cdot G^{\circ},f^{!}_{K}\cdot G^{\circ}) \simeq \mathrm{Hom}^{\circ}_{\mathrm{comp}\ Y_A}(f^{K^{\circ}}_{!}\ f^{!}_{K}\cdot G^{\circ},G^{\circ})$$

du morphisme identique de $f^{!}_{K}\cdot G^{\circ}$.

4.3. On peut d'ailleurs décrire plus précisément le morphisme

$$\psi(f,G^{\circ},K^{\circ}) : f^{K^{\circ}}_{!}\ f^{!}_{K^{\circ}} \longrightarrow G^{\circ} \quad .$$

Pour tout entier q et tout entier r, désignons par :

4.3.1. $$\psi(f,G^{r},K^{q}) : f^{K^{q}}_{!}\ f^{!}_{K^{q}}\ G^{r} \longrightarrow G^{r}$$

le morphisme fonctoriel provenant des propriétés d'adjonction des foncteurs $f^{K^{q}}_{!}$ et $f^{!}_{K^{q}}$ (1.5.). Le composant de degré r de $\psi(f,G^{\circ},K^{\circ})$:

$$\psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r} = \coprod_{\substack{q,p,s \\ q+p+s=r}} f^{K^{p}}_{!}\ f^{!}_{K^{-p}}\ G^{s} \longrightarrow G^{r}$$

est une somme directe de morphismes :

$$\psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r} = \coprod_{\substack{q,p,s \\ q+p+s=r}} \psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r}_{q,p,s}$$

$$\psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r}_{q,p,s} : f^{K^{q}}_{!}\ f^{!}_{K^{-p}}\ G^{s} \longrightarrow G^{r} \quad ,$$

et on a :

4.3.2.
$$\begin{cases} \psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r}_{q,p,s} = 0 \quad \text{si} \quad r \neq s \\ \psi(f,G^{\circ},K^{\circ})^{r}_{q,-q,r} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}\ \psi(f,G^{r},K^{q}) \end{cases}$$

Les relations 4.3.2. résultent immédiatement de la définition de $\Delta_{K^{\circ}}(F^{\circ},G^{\circ})$ (3.4.4.) .

4.4. Le morphisme de résolution $\epsilon : A \to K^\circ$, définit pour tout objet G° de $I^+(Y_A)$ un morphisme fonctoriel en G° :

4.4.1. $$f_!^{\epsilon} : f_! f_K^!.G^\circ \longrightarrow f_!^{K^\circ} f_K^!.G^\circ \quad .$$

Le morphisme $f_!^{\epsilon}$ est un quasi-isomorphisme car $f_K^!. G^\circ$ est un complexe dont les composants sont injectifs. Notons

4.4.2. $$\Phi(f,G^\circ,K^\circ) : f_! f_K^!. G^\circ \longrightarrow G^\circ$$

le morphisme composé :

$$\begin{array}{ccc} f_! f_K^!. G^\circ & & \\ \Big\downarrow f_!^{\epsilon} & \searrow^{\Phi(f,G^\circ,K^\circ)} & \\ f_!^{K^\circ} f_K^!. G^\circ & \xrightarrow{\Psi(f,G^\circ,K^\circ)} & G^\circ \end{array}$$

Il résulte de 4.2.2. qu'on a un diagramme commutatif fonctoriel en G° :

4.4.3.
$$\begin{array}{ccc} Q_{Y_A} f_! f_K^!.G^\circ & \xrightarrow{Q_{Y_A}\Phi(f,G^\circ,K^\circ)} & \\ \Big\downarrow \wr & & Q_{Y_A} G^\circ \\ Rf_! f_+^! Q_{Y_A} G^\circ & \xrightarrow{\Phi(f,Q_{Y_A} G^\circ)} & \end{array}$$

où l'isomorphisme vertical provient du quasi-isomorphisme (4.4.1.) , et des isomorphismes (3.5.4.) et (3.5.5.) . Comme tout objet de $D^+(Y_A)$ est isomorphe à l'image par Q_{Y_A} d'un objet de $I^+(Y_A)$, le diagramme (4.4.3.) permet de reconstituer le morphisme $\Phi(f,G)$, (4.1.1.) lorsqu'on connait le morphisme $\Phi(f,G^\circ,K^\circ)$. Nous allons maintenant donner une description directe de ce morphisme ne faisant pas intervenir l'isomorphisme $\Delta_K^\circ(f_K^!. G^\circ, G^\circ)$.

4.5. On a, pour tout ouvert V de X, (1.0.) :

4.5.1. $$f_K^!\cdot G^\cdot(V) = \mathrm{Hom}^\cdot_{Y_A}(f_!K^\cdot_V, G^\cdot) .$$

Soient U un ouvert de Y et $P(U)$ la famille des fermés de $f^{-1}(U)$ qui sont propres sur U. Par définition du foncteur $f_!$ on a :

4.5.2. $$f_!f_K^!\cdot G^\cdot(U) = \varinjlim_{|s|\in P(U)} \mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!\cdot G^\cdot)$$

où $A_{|s|}$ désigne le faisceau constant A sur $|s|$ prolongé par zéro sur X en dehors de $|s|$. De plus on a, pour tout $|s|$ dans $P(U)$, des suites exactes :

4.5.3. $$0 \longrightarrow A_{f^{-1}(U)-|s|} \longrightarrow A_{f^{-1}(U)} \longrightarrow A_{|s|} \longrightarrow 0$$

4.5.4. $$0 \longrightarrow K^\cdot_{f^{-1}(U)-|s|} \longrightarrow K^\cdot_{f^{-1}(U)} \longrightarrow K^\cdot_{|s|} \longrightarrow 0 \quad ;$$

d'où une suite exacte de complexes (4.5.3.) :

$$0 \to \mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!\cdot G^\cdot) \to \mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{f^{-1}(U)}, f_K^!\cdot G^\cdot) \to \mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{f^{-1}(U)-|s|}, f_K^!\cdot G^\cdot) .$$

En utilisant 4.5.1. on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!\cdot G^\cdot) \simeq \ker(\mathrm{Hom}^\cdot_{Y_A}(f_!K^\cdot_{f^{-1}(U)}, G^\cdot) \to \mathrm{Hom}^\cdot_{Y_A}(f_!K^\cdot_{f^{-1}(U)-|s|}, G^\cdot))$$

d'où, en utilisant 4.5.4. , un isomorphisme :

4.5.5. $$\mathrm{Hom}^\cdot_{X_A}(A_{|s|}, f_K^!\cdot G^\cdot) \simeq \mathrm{Hom}^\cdot_{Y_A}(f_!K^\cdot_{|s|}, G^\cdot)$$

et par suite un isomorphisme (4.5.2.) :

4.5.6. $$f_!f_K^!\cdot G^\cdot(U) \simeq \varinjlim_{|s|\in P(U)} \mathrm{Hom}^\cdot_{Y_A}(f_!K^\cdot_{|s|}, G^\cdot) .$$

Or, pour tout $|s|$ dans $P(U)$, le morphisme composé :

$$A_{f^{-1}(U)} \xrightarrow{\epsilon_{f^{-1}(U)}} K^{\cdot}_{f^{-1}(U)} \longrightarrow K^{\cdot}_{s}$$

est une section de degré 0 de $K^{\cdot}_{|s|}$ sur $f^{-1}(U)$ dont le support est propre sur U . Une telle section est, par définition, une section de $f_! K^{\cdot}_{|s|}$ sur U :

$$\sigma(U,|s|,\epsilon) : A_U \to f_!(K^{\cdot}_{|s|}) .$$

Il est clair qu'on obtient ainsi un morphisme $\sigma(U,\epsilon)$ du faisceau A_U dans le système projectif de complexes de faisceaux $(f_!(K^{\cdot}_{|s|}), |s| \in P(U))$. On déduit alors de 4.5.6., par composition avec $\sigma(U,\epsilon)$, un morphisme de complexes :

$$f_! f_K^{!} \cdot G^{\cdot}(U) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}_{Y_A}(A_U, G^{\cdot}) = G^{\cdot}(U)$$

qu'on note :

4.5.7. $$M(f,G^{\cdot},K^{\cdot})(U) : f_! f_K^{!} \cdot G^{\cdot}(U) \longrightarrow G^{\cdot}(U) .$$

Il est clair que, lorsque U varie, ces différents morphismes sont compatibles avec les restrictions et par suite, qu'on a défini un morphisme de complexes de faisceaux :

4.5.8. $$M(f,G^{\cdot},K^{\cdot}) : f_! f_K^{!} \cdot G^{\cdot} \longrightarrow G^{\cdot} .$$

4.6. Proposition .

On a $$\Phi(f,G^{\cdot},K^{\cdot}) \simeq M(f,G^{\cdot},K^{\cdot}) .$$

La proposition résulte de la définition de $\Phi(f,G^{\cdot},K^{\cdot})$ (4.4.2.) et des propositions (1.7.) et (1.9.) .

4.7. Le foncteur $Rf_! : D(X_A) \to D(Y_A)$ définit, pour tout objet F de $D(X_A)$ et tout objet F' de $D^+(X_A)$ un morphisme bifonctoriel :

4.7.1. $\qquad R\mathcal{H}om(R f_!) : R\,Hom(F,F') \longrightarrow R\,Hom(Rf_!F, Rf_!F')$

4.8. Proposition .

Sous les hypothèses du théorème 3.2., le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\,Hom(F, f_+^! G) & \xrightarrow{R\mathcal{H}om(Rf_!)} & R\,Hom(Rf_!F, Rf_!f_+^!G) \\ & \searrow^{\Delta_f(F,G)} & \downarrow{\scriptstyle R\,Hom(Rf_!F, \Phi(f,G))} \\ & & R\,Hom(Rf_!F, G) \end{array}$$

($\Phi(f,G)$ désigne le morphisme d'adjonction (4.1.1.)) .

4.9. Démonstration .

Soient $F^\cdot$ un complexe de faisceaux sur X et $F'^\cdot$ un complexe borné inférieurement de faisceaux sur X . Soit de plus $A \xrightarrow{\varepsilon} K^\cdot$ une résolution finie plate et f-molle du faisceau constant A .

Le foncteur $f_!^{K^\cdot}$ définit un morphisme bifonctoriel de complexes :

4.9.1. $\qquad Fl^\cdot(f_!^{K^\cdot}) : Hom^\cdot(F^\cdot, F'^\cdot) \longrightarrow Hom^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, f_!^{K^\cdot} F'^\cdot)$

Ce morphisme est défini comme suit : un élément de degré n de $Hom^\cdot(F^\cdot, F'^\cdot)$ est une famille $(a_{p,q})$, $p + q = n$,

$$a_{p,q} : F^{-p} \longrightarrow F'^{q} .$$

Un élément de degré n de $Hom^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, f_!^{K^\cdot} F'^\cdot)$ est une famille $(b_{s,p',t,q'})$, $s + p' + t + q' = n$,

$$b_{s,p',t,q'} : f_!^{K^{-s}} F^{-p'} \longrightarrow f_!^{K^t} F'^{q'} .$$

On a alors,

$$Fl^n(f_!^{K^\circ})\ (a_{pq}) = (b_{s,p',t,q'})\ ,$$

où

4.9.2. $$\begin{cases} b_{s,p',t,q'} = 0 \quad \text{si} \quad p' \neq p \quad \text{ou} \quad q' \neq q\ . \\ b_{s,p,s,q} = (-1)^{ps+\frac{s(s+1)}{2}}\ f_!^{K^s}(a_{p,q})\ . \end{cases}$$

On a de plus des morphismes canoniques

$$can_1 : Q_{Ab}\ Hom^\circ(F^\circ, F'^\circ) \longrightarrow R\ Hom(Q_{X_A} F^\circ, Q_{X_A} F'^\circ)$$

$$can_2 : Q_{Ab}\ Hom^\circ(f_!^{K^\circ} F^\circ, f_!^{K^\circ} F'^\circ) \longrightarrow R\ Hom(Q_{Y_A} f_!^{K^\circ} F^\circ, Q_{Y_A} f_!^{K^\circ} F'^\circ)$$

provenant du fait que $R\ Hom(\ ,\ )$ est le foncteur dérivé de $Hom^\circ(,)$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que le diagramme ci-après est commutatif :

4.9.3.
$$\begin{array}{ccc} Q_{Ab}Hom^\circ(F^\circ,F'^\circ) & \xrightarrow{Q_{Ab}Fl^\circ(f_!^{K^\circ})} & Q_{Ab}Hom^\circ(f_!^{K^\circ}F^\circ, f_!^{K^\circ}F'^\circ) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle can_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle can_2} \\ R\ Hom(Q_{X_A}F^\circ, Q_{X_A}F'^\circ) & & R\ Hom(Q_{Y_A}f_!^{K^\circ}F^\circ, Q_{Y_A}f_!^{K^\circ}F'^\circ) \\ & \searrow^{R\,Fl(Rf_!)} & \Big\downarrow\wr \\ & & R\ Hom(Rf_!Q_{X_A}F^\circ, Rf_!Q_{X_A}F'^\circ) \end{array}$$

où l'isomorphisme non nommé dans le diagramme provient des isomorphismes (3.5.5.) . On remarquera que dans ce diagramme, le morphisme can_1 est un isomorphisme lorsque F'° est un complexe dont les composants sont injectifs.

4.10. Fin de la démonstration de la proposition 4.8. .

En vertu de la commutativité des diagrammes 4.9.3., 4.2.2. et 4.2.1., tout revient à montrer que, pour tout complexe $F^\cdot$ sur X et tout complexe borné inférieurement $G^\cdot$ sur Y dont les composants sont injectifs, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^\cdot(F^\cdot, f_K^{!\cdot} G^\cdot) & \xrightarrow{\mathrm{Fl}^\cdot(f_!^{K^\cdot})} & \mathrm{Hom}^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, f_!^{K^\cdot} f_K^{!\cdot} G^\cdot) \\ & \searrow^{\Delta_{K^\cdot}(F^\cdot, G^\cdot)} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, \psi(f, G^\cdot, K))} \\ & & \mathrm{Hom}^\cdot(f_!^{K^\cdot} F^\cdot, G^\cdot) \end{array} \qquad 4.10.1.$$

(Pour se ramener à cette assertion on se sert du fait que $f_K^{!\cdot} G^\cdot$ étant de type injectif (1.2.), le morphisme can_1 (4.9.3.), est un isomorphisme) .

La démonstration du fait que le diagramme 4.10.1. est commutatif est immédiate en utilisant les formules explicites 4.9.2., 4.3.2. et 3.4.4. et en utilisant de plus la commutativité du diagramme 1.5.1. .

4.11. Nous laissons au lecteur le soin de voir comment on peut améliorer les résultats de ce numéro lorsqu'on suppose que les espaces topologiques X et Y sont de A-dimension injective finie .

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

STRASBOURG

Séminaire Heidelberg-Strasbourg

Année 1966/67

Exposé 5

LA DUALITE DE POINCARE DANS LE CAS DES VARIETES

Rédigé par G. GOERINGER d'après un exposé de M. ZISMAN à Oberwolfach

---

On conserve les notations de l'exposé 4 et on se propose d'expliciter le théorème de dualité dans le cas où X est une variété et f l'application de X sur un point. On considère d'abord le cas d'une variété topologique et ensuite celui d'une variété différentiable. Les résultats énoncés pour les variétés topologiques sont d'ailleurs valables pour les espaces n C.M. de A. BOREL (i.e. n cohomological manifolds) .

Les démonstrations sont identiques à condition de remplacer dans les raisonnements les ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ par des ouverts dont la cohomologie à supports compacts est isomorphe à celle de $\mathbb{R}^n$.

1 . Faisceau d'orientation d'une variété topologique .

Notons pour commencer que puisque f est l'application d'une variété sur un point, $f_!$ est de dimension cohomologique finie. En effet $f_!$ n'est autre que Γ_c (confer exposé 3) et par conséquent notre affirmation résulte du théorème 1.4. de l'exposé 2 .

1.1. Prenons pour G le faisceau constant de fibre A sur Y, c'est un module que nous désignerons également par la lettre A .

Soit $\underline{A}$ le faisceau simple de base X et de fibre A . Soient $\underline{A} \to K^\cdot$ une résolution finie de $\underline{A}$ par des faisceaux c-mous et $I^\cdot$ une résolution injective de A .

Par définition on a pour tout ouvert U de X : $f^!A(U) = \mathrm{Hom}^\cdot(f_! K_U^\cdot , I^\cdot)$. Comme $K_U^\cdot$ est un complexe borné et $I^\cdot$ un complexe d'injectifs, $H^{p+q}\,\mathrm{Hom}^\cdot(\Gamma_c(U,K^\cdot),I^\cdot)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = \sum_{i+j=q} \mathrm{Ext}_A^p[H_c^{-i}(U,\underline{A}) , \mathcal{H}^j(I^\cdot)]$$

$$= \mathrm{Ext}_A^p[H_c^{-q}(U,\underline{A}),A] .$$

En effet on a $\mathcal{H}^j(I^\cdot) = 0$ si $j \neq 0$ et $\mathcal{H}^0(I^\cdot) = A$.

Si de plus U est un ouvert de X homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ on a $H_c^{-q}(U,\underline{A}) = 0$ si $q \neq -n$ et $H_c^n(U,\underline{A})$ est isomorphe à A .

Donc $E_2^{pq} = 0$ si $q \neq -n$ et $E_2^{p,-n} = 0$ si $p \neq 0$. De plus E_2^{o-n} est égal à $\mathrm{Hom}_A[H_c^n(U,\underline{A}),A]$ qui est isomorphe à A .

On en déduit que : $H^p f^!A(U) = 0$ si $p \neq -n$ et que $H^{-n} f^!A(U)$ est isomorphe à A . Donc $\mathcal{H}^p f^!A = 0$ si $p \neq n$ et $\mathcal{H}^{-n} f^!A$ est le faisceau associé au préfaisceau : $U \to \mathrm{Hom}_A(H_c^n(U,\underline{A}),A)$ lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{C}^\cdot$ le complexe de faisceaux dont les composantes sont nulles sauf celle de degré $-n$ et tel que $\mathcal{C}^{\cdot,-n} = \mathcal{H}^{-n} f^!A$.

$\mathcal{C}^\cdot$ et $f^!A$ sont quasi-isomorphes. En effet on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & (f^!A)^{-n-1} & \longrightarrow & (f^!A)^{-n} & \xrightarrow{d^{-n}} & (f^!A)^{-n+1} & \longrightarrow & \cdots\cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\circledast \quad \cdots & \longrightarrow & (f^!A)^{-n-1} & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, d^{-n} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-n} f^!A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Ce diagramme définit deux morphismes : l'un du complexe $\circledast$ dans $f^!A$, l'autre du complexe $\circledast$ dans $\mathcal{C}^\cdot$. Ces morphismes sont des quasi-isomorphismes .

Posons $\mathcal{C} = T^{-n}\mathcal{C}'$ où T est l'opération définie par $T(X^\cdot)^p = X^{p+1}$, et $d_{T(X^\cdot)} = -d_X$ pour tout complexe $X^\cdot$.

$\mathcal{C}$ est appelé le faisceau d'orientation de X .

1.2. Proposition .

Le faisceau $\mathcal{C}$ est localement simple de fibre A .

Démonstration .

Puisque $\mathcal{C}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longrightarrow \mathrm{Hom}[H_c^n(U,\underline{A}),A]$$

lorsque U est un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que l'application canonique r_u de $\mathrm{Hom}[H_c^n(U,\underline{A}),A]$ dans $\mathcal{C}(U)$ est un isomorphisme.

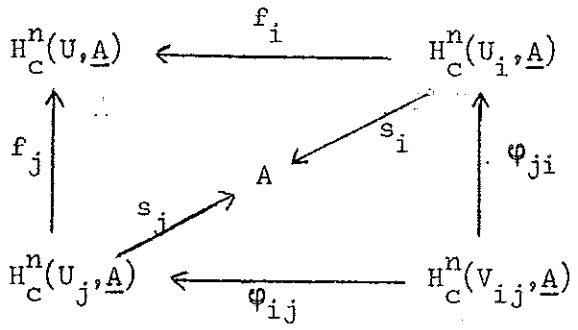
Remarquons au préalable que si V est un ouvert contenu dans U et homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, l'application $H_c^n(V,\underline{A}) \to H_c^n(U,\underline{A})$ induite par l'inclusion est un isomorphisme.

r_u est injective . En effet, soit s un élément de $\mathrm{Hom}[H_c^n(U,\underline{A}),A]$ tel que son image soit nulle dans $\mathcal{C}(U)$. Cela signifie que pour tout x dans U ,on peut trouver un ouvert V homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ contenant x et contenu dans U tel que l'image de s dans $\mathrm{Hom}[H_c^n(V,\underline{A}),A]$ soit nulle. D'après notre remarque, cela signifie que s est nulle.

r_u est surjective . Soit $\tilde{s}$ un élément de $\mathcal{C}(U)$. Il résulte de la définition de r_u qu'on peut recouvrir U par des ouverts U_i homéomorphes chacun à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $s_i \in \mathrm{Hom}[H_c^n(U_i,\underline{A}),A]$ vérifiant les relations $\tilde{s}_i = r_{u_i}(s_i)$ et $\tilde{s}_i = \tilde{s}|_{U_i}$, et par conséquent la relation $\tilde{s}_i|_{U_i \cap U_j} = \tilde{s}_j|_{U_i \cap U_j}$.

Soit V_{ij} une boule ouverte contenue dans $U_i \cap U_j$. Puisque l'on a $\tilde{s}_i|_{V_{ij}} = \tilde{s}_j|_{V_{ij}}$ et puisque nous savons déjà que $r_{V_{ij}}$ est injective on a

aussi : $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$ ce qui peut encore s'exprimer par la commutativité du diagramme suivant :



f_i est l'isomorphisme de $H_c^n(U_i,\underline{A})$ dans $H_c^n(U,\underline{A})$ induit par l'inclusion. De même φ_{ij} est l'isomorphisme de $H_c^n(V_{ij},\underline{A})$ dans $H_c^n(U_j,\underline{A})$ induit par l'inclusion. Les définitions de f_j et φ_{ji} sont analogues.

De la commutativité du diagramme, il résulte que $s_i f_i^{-1} = s_j f_j^{-1}$. Posons alors : $s = s_i f_i^{-1}$. On a $r_U s = \tilde{s}$. On voit donc que r_U est surjectif.

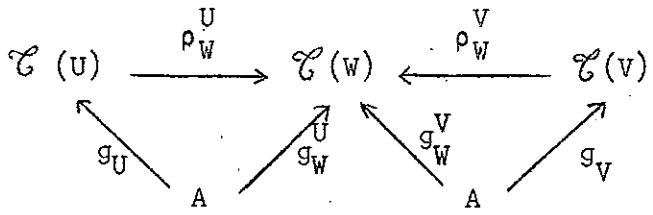
1.3. Proposition .

Les faisceaux $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ sont canoniquement isomorphes à $\underline{A}$.

Démonstration .

Soient U et V deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ et W une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans $U \cap V$. Soient g_U et g_V des isomorphismes $A \to \mathcal{C}(U)$, $A \to \mathcal{C}(V)$. On choisit des applications g_W^U et g_W^V de A dans $\mathcal{C}(W)$ de manière que le diagramme suivant soit commutatif :

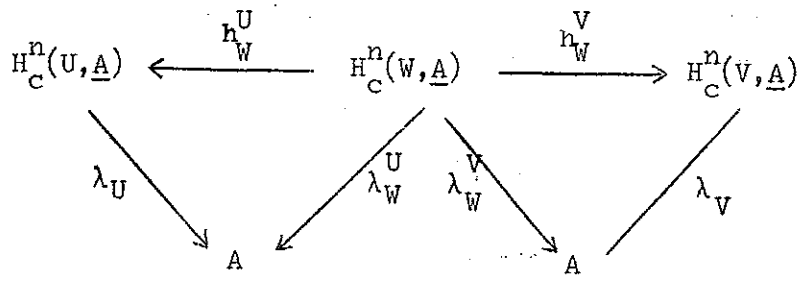
*



ρ_W^U et ρ_W^V sont les homomorphismes de restriction de $\mathcal{C}(U)$ dans $\mathcal{C}(W)$ et de $\mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{C}(W)$ respectivement.

Démontrons que dans ces conditions l'application de A dans A que l'on peut déduire de ce diagramme est la multiplication par $+1$ ou -1. En effet, se donner un isomorphisme g_U de A sur $\mathrm{Hom}[H_c^n(U,\underline{A}),A]$ c'est se donner l'isomorphisme $\lambda_U : H_c^n(U,\underline{A}) \to A$ défini par $\lambda_U = g_U(1)$.

Avec ces nouvelles notations le diagramme * peut s'écrire

** 

h_W^U et h_W^V sont les applications :

$$H_c^n(U,\underline{A}) \longleftarrow H_c^n(W,\underline{A})$$

$$H_c^n(V,\underline{A}) \longleftarrow H_c^n(W\,\underline{A})$$

induites par les inclusions $W \subset U$ et $W \subset V$ respectivement. L'application de A dans A définie par le diagramme ** est un isomorphisme de A-modules. Si $A = Z$, c'est donc nécessairement la multiplication par $+1$ ou -1. Dans le cas général on a $H_c^n(U,\underline{A}) = H_c^n(U,\underline{Z}) \otimes A$ et par conséquent on a encore $(\lambda_W^V)^{-1}\,\lambda_W^U = \pm 1$. La proposition en résulte aussitôt.

1.4. Définition .

Une variété orientable est une variété dont le faisceau $\mathcal{C}$ est trivial. Une orientation d'une variété orientable est la donnée d'une trivialisation de $\mathcal{C}$ i.e. d'un isomorphisme : $\underline{A} \to \mathcal{C}$.

Exemples . On vérifie sans peine que $\mathbb{R}^n$, S^n sont des variétés orientables.

2 . Le Théorème de dualité .

Si F est un faisceau sur X on a :

$$H^p R\,Hom^\cdot[F, f^! A] = H^p R\,Hom^\cdot[F, T^n \mathcal{C}]$$

$$= Ext^p[F, T^n \mathcal{C}]$$

$$= Ext^{n+p}[F, \mathcal{C}] \quad .$$

Calculons maintenant $H^p R\,Hom^\cdot[R f_! F, A]$. A cet effet soit $F^\cdot$ une résolution c-molle finie de F et $I^\cdot$ une résolution injective de l'anneau A . Il vient :

$$H^p R\,Hom^\cdot[R f_! F, A] = H^p Hom^\cdot[\Gamma_c(X, F^\cdot), I^\cdot]$$

D'autre part $H^{p+q}\,Hom^\cdot[\Gamma_c(X,F^\cdot), I^\cdot]$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme E_2^{pq} est $\sum_{i+j=q} Ext^p[H_c^{-i}(X,F), \mathcal{H}^j I^\cdot] = Ext^p[H_c^{-q}(X,F), A]$

D'après le théorème de dualité (confer exposé 4), il existe donc une suite spectrale :

$$E_2^{pq} = Ext^p(H_c^{-q}(X,F), A] \Rightarrow Ext^{p+q+n}(F, \mathcal{C}) \ .$$

Si l'on suppose maintenant que A est un corps, la suite spectrale est dégénérée car

$$Ext^p[H_c^{-q}(X,F), A] = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 0 \ .$$

On peut donc énoncer

2.1. Théorème .

Soit A un corps ; il existe alors un isomorphisme naturel $H^q(\Delta)$ de $Ext^{n-p}(F, \mathcal{C})$ sur $Hom[H_c^p(X,F), A]$.

2.2. Corollaire .

Il existe un isomorphisme de $H^{n-p}(X, A)$ sur $Hom[H_c^p(X, \mathcal{C}), A]$. En effet, prenant $F = \mathcal{C}$ on a

$$Ext^r(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = H^r[X, \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C})] \ .$$

2.3. Si $n = p$, $A = H^0(X,\underline{A})$ est alors isomorphe à $\mathrm{Hom}[H_c^p(X,\mathcal{C}),A]$, l'application $\Phi : f_! f^! A \to A$ induit donc un isomorphisme de $H_c^n(X,\mathcal{C})$ sur

L'image inverse de 1 par cet isomorphisme est appelée classe fondamentale de X .

3 . Le cas différentiable .

A partir de maintenant on suppose que X est une variété C^∞ , dénombrable à l'infini, de dimension n . L'anneau de base A sera le corps $\mathbb{R}$ des réels .

Avec ces hypothèses la suite exacte de De Rham

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d^0} \Lambda^1 T^* \xrightarrow{d^1} \Lambda^2 T^* \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Lambda^n T^* \to 0$$

où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des germes de fonctions différentiables de X et $\Lambda^p T^*$ le faisceau des germes de formes différentielles de degré p sur X , est une résolution c-molle finie du faisceau constant $\mathbb{R}$. De plus la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{O}_X \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C} \xrightarrow{d^0 \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}} \Lambda^1 T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C} \dots \xrightarrow{d^{n-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}}} \Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C} \to 0$$

est une résolution c-molle de $\mathcal{C}$.

Désignons alors provisoirement par Int (car nous verrons que cet homomorphisme n'est autre que l'intégrale) le morphisme composé :

$$\Gamma_c(U, \Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{coker}(d^{n-1} \otimes \mathrm{Id}) = H_c^n(U,\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

où la première flèche est l'application canonique et la seconde est l'isomorphisme explicité dans 2.3. . Désignons par $\langle\ \rangle$: l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\Gamma_c(U,\mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $\langle f\omega \rangle = \mathrm{Int}(f\omega)$.

3.1. Proposition .

Pour tout $\omega \in \Gamma(U, \Lambda^n T^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathscr{C})$ l'application de $\Gamma_c(U, \mathscr{O}_X)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f \to \langle f\, \omega \rangle$ est une mesure .

Démonstration .

Il faut montrer que si le support de f est contenu dans un compact K il existe une constante positive C_K telle que l'on ait l'inégalité $|\langle f\, \omega \rangle| \leq |f|\, C_K$ pour toute fonction f à support compact dans U .

Prenons un recouvrement fini de K par des ouverts U_i homéomorphes à $\mathbb{R}^n$. On peut trouver des fonctions f_i , appliquant U dans $\mathbb{R}$, à support compact dans U_i , telles que l'on ait $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$ dans K . L'égalité $f = \sum_{i=1}^{n} f_i f$ est donc valable dans U . L'intersection de K avec le support de f_i est un compact. L'inégalité

$$|\langle f\ \omega \rangle| \leq \Sigma\, |\langle f f_i\ \omega \rangle|$$

montre donc qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas où K est contenu dans un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$.

Il suffit alors de montrer que la suite

$$* \qquad \Gamma_c(\mathbb{R}^n, \Lambda^{n-1} T^*) \xrightarrow{d^{n-1}} P_c(\mathbb{R}^n, \Lambda^n T^*) \xrightarrow{\int} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet dans ce cas le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma_c(R^n, \Lambda^{n-1} T^*) & \longrightarrow & \Gamma_c(R^n \Lambda^n T^*) & \xrightarrow{\int} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \mathrm{id} & & \uparrow \mathrm{id} & & \uparrow \mu & & \\
\Gamma_c(R^n, \Lambda^{n-1} T^*) & \longrightarrow & \Gamma_c(R^n, \Lambda^n T^*) & \longrightarrow & H_c^n(R^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les deux lignes sont exactes montre qu'il existe un isomorphisme unique $\mu : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ qui le complète commutativement.

Si on identifie d'autre part $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ et $\mathbb{R}$ par la dualité de Poincaré il vient que μ n'est autre que la multiplication par un nombre réel positif non nul que l'on nommera encore μ . Autrement dit on a :

$$\int f\omega = \mu \, \mathrm{Int}(f\omega) \, .$$

3.2. Lemme .

La suite * est exacte .

En effet si g est une $(n-1)$-forme à support compact on a $\int dg = 0$ d'après la formule de Stokes et réciproquement si f est une fonction continue à support compact K telle que $\int f \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0$, il existe une $(n-1)$-forme à support compact g telle que $f \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = dg$.

En effet supposons K contenu dans le cube $\alpha \leq x_i \leq \beta$, $i = 1, \ldots, n$. Posons $\varphi_1(x_2 \ldots x_n) = \int_\alpha^\beta f(t, x_2 \ldots x_n)dt$.

$$\varphi_{i+1}(x_{i+2} \ldots x_n) = \int_\alpha^\beta \varphi_i(t, x_{i+2} \ldots x_n)dt \, .$$

Soit h une fonction différentiable d'une variable telle que :

$$h(t) = 1 \quad \text{pour} \quad t \geq \beta$$

$$h(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq \alpha \, .$$

Posons $A_i = h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_{i-1})\left[\int_\alpha^\beta \varphi_{i-1}(t, x_{i+1} \ldots x_n)dt - h(x_i)\varphi_i(x_{i+1} \ldots x_n)\right]$

le support de A_i est dans le cube, donc compact.

Posons enfin $g = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i A_i \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_2} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

On vérifie que $dg = f \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

C.Q.F.D.

3.2. Proposition .

Le faisceau $\Lambda^n T^* \otimes \mathcal{C}$ est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{M}$ des formes différentielles impaires de degré n sur X . En particulier il est isomorphe à $\mathcal{O}_X$.

Démonstration .

Nous savons que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$ puisque X est paracompact. En effet munissons X d'une métrique riemannienne donnée par

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^U \, dx_i \, dx_j ,$$

dans l'ouvert de coordonnées U .

Si on pose $a_U = \dfrac{1}{\sqrt{\det g_{ij}^U}}$, on voit aisément que l'on a $a_U = |J| a_V$,

où (V, y_i) est un autre ouvert de coordonnées et où on a posé

$$J = \frac{D(x_1 \cdots x_n)}{D(y_1 \cdots y_n)} .$$

Par conséquent la forme α donnée par : $\alpha|_U = a_U \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ est une n-forme différentielle impaire partout différente de 0 . Toute n-forme impaire β s'écrit donc $\beta = f\alpha$ avec $f \in \mathcal{O}_X$.

Explicitons l'isomorphisme annoncé dans la proposition. Pour cela il suffit de se donner l'application au niveau des préfaisceaux ; soit donc U un ouvert de X et ω un élément de $\Gamma(U, \Lambda^n T^* \otimes \mathcal{C})$; à ω on associe (confer 3.1.) la mesure de $\mathcal{O}_X$ définie par $f \to \langle f \omega \rangle$ qui est bien un élément de $\Gamma(U, \mathcal{M})$. Comme les deux faisceaux $\Lambda^n T^* \otimes \mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$ sont tous deux localement libres de rang 1 sur $\mathcal{O}_X$, il suffit, pour montrer que ces faisceaux sont isomorphes, de montrer que l'application précédente est un monomorphisme lorsque U est assez petit.

Si U est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ on a vu que $\langle f, \omega \rangle$ n'est autre que $\int f \omega$ à un facteur constant non nul près, et la proposition en résulte.

3.3. L'isomorphisme défini en 3.2. nous permet de retrouver la définition habituelle de l'orientation.

En effet soit un élément ω de $\Gamma(U, \Lambda^n T^* \otimes \mathcal{C})$ U étant un ouvert de coordonnées $x_1 \ldots x_n$. On peut écrire :

$$\omega = a_U \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \otimes s_U \quad \text{où} \quad s_U \text{ est une section de } \mathcal{C}$$

et a_U une fonction différentiable. Soit V un autre ouvert de coordonnées $y_i \; y_n$. On a $\omega = a_V \, dy_1 \cap dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n \otimes s_V$.

De plus on a les relations dans $U \cap V$.

$$a_U = J \, a_V \qquad \text{avec} \quad J = \frac{D(x_1 \ldots x_n)}{D(y_1 \ldots y_n)}$$

$$s_U = \epsilon_U^V \, s_V \qquad \epsilon_U^V = \pm 1 \text{ (confer démonstration de 1.3.)}$$

A $a_U \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \otimes s_U$ on associe la n-forme impaire $a_U \, s_U \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ par l'isomorphisme défini plus haut. Puisque par définition des formes impaires on a :

$$a_U \, s_U = |J| \, a_V \, s_V \;,$$

on en déduit l'égalité $\epsilon_U^V = \frac{J}{|J|}$.

C'est la définition classique "différentiable" de l'orientation d'une variété.

3.4. Une section de $\Lambda^n T^* \otimes \mathcal{C} = \Omega$ est appelée volume. Si l'on identifie $\mathcal{M}$ et Ω à l'aide de 3.2. on voit que l'application $\mathbb{R}$-linéaire Int n'est autre que l'intégrale d'une forme volume.

3.5. Remarques.

1 - La dualité est un isomorphisme de $H^{n-p}(X,A)$ dans $H_c^p(X,\mathcal{C})^*$ c'est-à-dire une dualité au sens des modules.

On peut aussi l'exprimer par les applications :

$$H^{n-p}(X, \mathcal{C}) \otimes H_c^p(X, \underline{A}) \to A$$

$$H^{n-p}(X, \underline{A}) \otimes H_c^p(X, \mathcal{C}) \to A$$

$$\Gamma(\Lambda^{n-p} T^*) \otimes \Gamma_c(\Lambda^p T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to \Gamma_c(\Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) .$$

Considérons les deux complexes :

$$0 \to \mathrm{Hom}[\Gamma_c(\Lambda^n T^*), \mathbb{R}] \to \mathrm{Hom}[\Gamma_c(\Lambda^{n-1} T^*, \mathbb{R})] \to \dots \mathrm{Hom}[\Gamma_c(0_X) \mathbb{R})] \to 0$$

$$0 \to \Gamma(\Lambda^0 T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to \Gamma(\Lambda^1 T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to \dots \Gamma(\Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to 0$$

Soit α_p l'application de $\Gamma(\Lambda^p T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C})$ dans $\mathrm{Hom}[\Gamma_c(\Lambda^{n-p} T^*), \mathbb{R}]$ définie de la manière suivante :

A σ appartenant à $\Gamma(\Lambda^p T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C})$ on associe l'élément f de $\mathrm{Hom}[\Gamma_c(\Lambda^{n-p} T^*), \mathbb{R}]$ tel que $f(\varphi) = \int \varphi \cap \sigma$.

φ appartenant à $\Gamma_c(\Lambda^{n-p} T^*)$. Il résulte du théorème de dualité que le morphisme $\alpha = (\alpha_p)$ est un quasi-isomorphisme .

2 - Soit $\mathcal{D}^{n-p}$ le dual topologique de $\Gamma_c(\Lambda^p T^*)$; $\mathcal{D}^{n-p}$ est contenu dans $\mathrm{Hom}[\Gamma_c(\Lambda^p T^*), \mathbb{R}]$.

Il est possible de définir un morphisme $\mu = (\mu_p)$ entre les deux complexes :

$$0 \to \mathcal{D}^0 \to \mathcal{D}^1 \to \dots \to \mathcal{D}^n \to 0$$

et $0 \to \Gamma(\Lambda^0 T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to \Gamma(\Lambda^1 T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to \dots \to \Gamma(\Lambda^n T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C}) \to 0$

d'une manière analogue à la définition des α_p .

A σ appartenant à $\Gamma(\Lambda^p T^* \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathcal{C})$ on associe l'élément g tel que

$g(\varphi) = \int \varphi \wedge \sigma$, φ appartenant à $\Gamma_c(\Lambda^{n-p} T^*)$.

Il résulte des théorèmes classiques de de Rham, que μ est un quasi-isomorphisme.

3 - D'après 2.1. et 2.2. on a , lorsque la variété (topologique) X est compacte, et A un corps

$$H^p(X,A) \approx \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(H^p(X,R),A),A)$$

L'espace vectoriel $H^p(X,A)$ est donc isomorphe à son bidual donc il est de dimension finie .