Introduction

Ce travail se divise en trois chapitres.

Les chapitre **I** et **II** sont partiellement liés; plus précisément, le **I** traite du problème de plongement d'un espace stratifié abstrait comme sous-analytique vérifiant la condition (w). Une remarque clôt ce chapitre; elle amène la question de la stabilité des objets de Whitney par projection générique, à laquelle répond partiellement le **II**. Quant au chapitre **III**, il s'agit d'une classification de la stratification $y^a = t^b x^c + x^d$ par la condition (w) de Verdier.

C'est sans doute parce que, dans de nombreux cas, la décomposition simpliciale ou cellulaire d'un sous-ensemble d'une variété peut paraître arbitrairement compliquée que la notion de stratification s'est peu à peu dégagée.

Whitney définit, en 1957, les premières stratifications d'ensembles algébriques réels en itérant, un nombre fini de fois, le processus qui consiste à retirer la partie singulière. Le problème de cette décomposition est, d'une part, l'absence de *contrôle* de l'incidence des strates et, d'autre part, l'absence de trivialité topologique, localement autour des strates, bien que l'ensemble soit localement conique.

En 1965, Whitney énonce les désormais célèbres conditions (a) et (b) pour une variété analytique [Whitney]. C.T.C. Wall montre que la condition (a), pour $X < Y$, implique la submersivité d'une "projection" standard restreinte à Y. R. Thom [Thom]$_2$ et J. Mather [Mather] montrent que la condition (b) implique la submersivité d'un couple de fonctions tubulaires (π_X, ρ_X) restreintes à Y. Une réciproque de ces deux résultats a été obtenue par D. Trotman [Trotman]$_2$.

En 1976, J-L. Verdier [Verdier] énonce "sa" condition de régularité notée (w). Entretemps ([Thom]$_1$ [Mather] 1965-70), Thom et Mather construisent le pendant de la notion de variété abstraite pour les ensembles stratifiés : les espaces stratifiés abstraits (e.s.a).

Les e.s.a. ont un rôle important en théorie des singularités, par exemple pour montrer la densité des applications topologiquement stables [GWDL]; ils servent également de base à l'étude des espaces topologiques pouvant accueillir une structure algébrique réelle [Akbulut,King].

L'étude des plongements des e.s.a. apparaît capitale dans la mesure où elle permet de transférer des résultats connus pour des stratifications ayant certaines propriétés (plus précisément celles obtenues par de bons plongements) aux e.s.a.

Natsume, Teufel et Verona, au début des années 80, démontrent l'existence de plongements d'e.s.a. vérifiant la condition (b) dans un espace euclidien, ce qui généralise les théorèmes de plongement de Whitney. Vérona obtient de plus un théorème d'approximation de plongement conservant les fibres dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, où n est la dimension de l'e.s.a. En 1988, M. Shiota prouve qu'un ensemble stratifié de Whitney localement compact est homéomorphe à un ensemble sous-analytique. Sa technique est proche de celle qu'utilise M. Goresky pour démontrer l'existence d'une triangulation pour un e.s.a [Goresky]$_2$.

La première partie de cette thèse améliore les résultats de plongement de Natsume, Teufel et Vérona, ainsi que celui de Shiota. Un premier paragraphe situe le cadre et les notations; il y est rappelé des définitions basiques concernant les e.s.a. Le paragraphe **2** est consacré à des rappels et définitions sur les submersions, champs de vecteurs contrôlés et les familles de lignes; quelques propriétés importantes des e.s.a. sont rappelées. Au paragraphe **3** est définie la notion d'ensemble stratifié de $\mathbb{R}^n$, et les conditions de régularité sont explicitées. Le paragraphe **4** est l'étude proprement dite de plongements d'e.s.a. Le théorème principal est précédé de plusieurs lemmes préparatoires et le résultat obtenu est le suivant :

> *il existe, pour tout e.s.a., un plongement sur une stratification sous-analytique vérifiant la condition (w) de Verdier et envoyant les données de contrôle sur des applications sous-analytiques.*

En remarque, la technique de projection générique a été utilisée pour réduire la dimension du plongement, ce qui conduit naturellement à se demander s'il est possible d'utiliser cette même technique dans le cas général des objets de Whitney. Ceci est une question de R. Thom.

La deuxième partie répond négativement à cette question : elle regroupe deux articles, en collaboration ave M. Kwieciński, ([Kwieciński, Noirel]$_1$ paru aux C.R.A.S et [Kwieciński, Noirel]$_2$ à paraître aux Proceedings) qui sont deux contre-exemples à la conjecture de R. Thom affirmant l'existence d'une stratification de Whitney à une projection générique d'un ensemble stratifié de Whitney. De plus, une condition suffisante est proposée dans le cas d'une courbe.

Dans la dernière partie, on considère la famille de variétés de Trotman dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $a, b, c, d \in \mathbb{N} \backslash 0$ et définies par : $V = f^{-1}(0)$ où $f(x, y, t) = -y^a + t^b x^c + x^d$. Le travail consiste à regarder si les conditions de régularité (w) et (w_s) sont vérifiées pour ces variétés à l'origine, canoniquement stratifiées par $(V \backslash 0t, 0t)$. Cette étude, systématique et calculatoire, conduit à une classification de ces variétés pour (w) et (w_s). Ceci complète des travaux de D. Trotman [6] et K. Bekka [1].

CHAPITRE I

Plongements
sous-analytiques et semi-algébriques
d'espaces stratifiés abstraits

1. Généralités sur les espaces stratifiés

La lettre μ désignera un entier positif ou l'infini.
Dans tout ce qui suit, une variété sera toujours de classe C^μ, séparée et second dénombrable et par conséquent métrisable et paracompacte. Une application lisse entre deux variétés sera de classe C^μ.

Définition 1.1. *Un espace stratifié abstrait (e.s.a.) est un triplet $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ où A est un espace topologique séparé et localement compact, $\mathcal{S}$ une partition localement finie de A en variétés connexes (strates) dont la topologie sous-jacente concide avec celle induite par l'inclusion (les strates seront donc localement fermées). On demande en outre que la propriété de frontière soit vérifiée ($X, Y \in \mathcal{S}$, $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow Y \subset \overline{X}$); ceci définit un préordre $Y \leq X$, si de plus $X \neq Y$ on notera $Y < X$ et l'on dira que Y est adjacente à X ou que X est incidente à Y. Enfin $\mathcal{T} = \{T_X, \pi_X, \rho_X\}_{X \in \mathcal{S}}$ est un système de "voisinages tubulaires" avec les propriétés suivantes :*

- *T_X est un voisinage ouvert de X.*
- *π_X est une rétraction continue de T_X sur X dite "projection" sur X.*
- *ρ_X est une application continue de T_X sur $[0, +\infty[$ dite fonction "distance" à X, et à ce titre doit vérifier $X = \rho_X^{-1}(0)$.*

Les applications π_X et ρ_X sont appelées données de contrôle.
On note $T_{X,Y} = T_X \cap Y$, $\pi_{X,Y} = \pi_{X|T_{X,Y}}$ et $\rho_{X,Y} = \rho_{X|T_{X,Y}}$. On demande que, pour tout triplet de strates $X < Y < Z$, soient vérifiées les propriétés suivantes là où elles ont un sens :

- *$(\pi_{X,Y}, \rho_{X,Y}) : T_{X,Y} \to X \times]0, +\infty[$ est une submersion lisse.*
- *$\pi_{X,Y} \circ \pi_{Y,Z}(z) = \pi_{X,Z}(z)$.*
- *$\rho_{X,Y} \circ \pi_{Y,Z}(z) = \rho_{X,Z}(z)$.*

Si la dernière condition n'est pas vérifiée A est quand même qualifié d'e.s.a. faible.

Notation 1.2. : Si ε est une application lisse de X dans $\mathbb{R}$, en suivant [Verona]$_2$, T_X^ε désignera l'ensemble $\{a \in T_X, \rho_X(a) < \varepsilon \circ \pi_X(a)\}$ et S_X^ε, l'ensemble $\{a \in T_X, \rho_X(a) = \varepsilon \circ \pi_X(a)\}$. La réunion de ces deux ensembles, notée $T_X^{\overline{\varepsilon}}$, n'est pas l'adhérence de T_X^ε en général, à cause des strates adjacentes à X.

Remarque 1.3. D'après les propriétés topologiques des variétés et la locale finitude de $\mathcal{S}$, on constate immédiatement que A est second dénombrable et par conséquent, comme les variétés, métrisable et paracompact. La propriété de frontière, dans le cas abstrait, signifie que l'adhérence d'une strate est une réunion de strates.

Remarque 1.4. Quitte à "éfiler" les tubes, on peut supposer que :

1) pour toute strate X, $(\pi_X, \rho_X)_{|T_X^\varepsilon}$ est propre pour une application ε "assez petite" (en particulier $\pi_{X|S_X^\varepsilon}$ sera propre et $\overline{S_X^\varepsilon}$ sera un e.s.a.)

2) T_X et T_Y se rencontrent uniquement si X et Y sont comparables.

La submersivité de $(\pi_{X,Y}, \rho_{X,Y})$ pour $X < Y$ entraine que $dimX < dimY$ et que $\leq$ est une relation d'ordre.

Définition 1.5. *Soient A et B deux e.s.a.. L'application* $\Phi : A \to B$ *est un isomorphisme si c'est un homéomorphisme qui établit un difféomorphisme entre les strates de A et les strates de B. Il est demandé en outre la compatibilité des données de contrôle : pour toute strate X de A il existe une application lisse* ε *telle que*

$(*)$ $\quad (\pi_{\Phi(X)}, \rho_{\Phi(X)}) \circ \Phi = (\Phi \circ \pi_X, \rho_X)$ *sur* T_X^ε.

Les isomorphismes faibles (resp. vagues) se définissent de même en remplaçant $(*)$ *par* $\pi_{\Phi(X)} \circ \Phi = \Phi \circ \pi_X$ *(resp. rien du tout).*

2. Submersions et champs de vecteurs contrôlés, famille de lignes

Soit un espace stratifié abstrait $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Définition 2.1. *Un champ de vecteurs stratifié v sur A est une famille* $(v_X, X \in \mathcal{S})$ *où* v_X *est un champ de vecteurs* $C^{\mu-1}$ *sur la strate X.*

Définition 2.2. *Un champ de vecteurs stratifié v sur A est contrôlé pour* $\mathcal{T}$ *si, pour toute strate X, il existe une application lisse* $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ *telle que, pour toute strate Y incidente à X et tout point* $y \in T_{X,Y}^\varepsilon$*, on ait les deux conditions de contrôle :*

1) $d\rho_{X,Y}(y).v_Y(y) = 0$: les trajectoires de v sont dans les réunions d'hypersurfaces de niveaux (ρ_X =constante);

2) $d\pi_{X,Y}(y).v_Y(y) = v_X(\pi_{X,Y}(y))$: la composante en Y du champ v se "projette" sur sa composante en X;
un champ ne vérifiant que la condition 2) est faiblement contrôlé.

Définition 2.3. *Si M est une variété et $f : A \to M$ une application continue, on dira que f est une submersion contrôlée si, pour toute strate X, on a les conditions de contrôle :*

1) $f_{|X} \to M$ est une submersion lisse;

2) Il existe une application lisse $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(y) = f \circ \pi_X(y)$ pour tout $y \in T_X^\varepsilon$: les "fibres" de f sont des réunions de fibres de π_X.

Les notions de champ de vecteurs et de submersion contrôlés sont reliées par la proposition suivante :

Proposition 2.4 [Mather]. *Si $f : A \to M$ est une submersion contrôlée et v un champ de vecteurs sur M, alors il existe un champ de vecteurs contrôlé w sur A tel que $df \circ w = v \circ f$.*

Cela signifie qu'un champ de vecteurs sur M peut être relevé en un champ contrôlé sur A par une submersion contrôlée.
A présent se pose la question de la généralisation du flot d'un champ de vecteurs sur une variété à un champ de vecteurs contrôlé.

Définition 2.5. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a.. Un groupe local à un paramètre sur A est un couple (J, α), où J est un ouvert de $\mathbb{R} \times A$ et $\alpha : J \to A$ une application continue vérifiant les cinq propriétés suivantes pour toute strate X et tout x dans X :*

1) Il existe $a_x \in [-\infty, 0[$ et $b_x \in]0, +\infty]$ tels que $J \cap (\mathbb{R} \times x) =]a_x, b_x[\times x$;

2) Si les deux quantités suivantes $\alpha(t+s, x)$ et $\alpha\big(t, \alpha(s,x)\big)$ sont définies, alors elles sont égales;

3) Si a_x (resp b_x) est fini, l'application $\alpha(., x) :]a_x, 0] \to A$ (resp. $\alpha(., x) : [0, b_x[\to A$) est propre;

4) La strate X est invariante par α : $\alpha\big(J \cap (\mathbb{R} \times X)\big) \subset X$;

5) L'application $\alpha(., x) :]a_x, b_x[\to X$ est de classe C^1.

Un résultat classique de géométrie différentielle dit qu'un champ de vecteurs C^1 sur une variété M engendre un unique groupe local à un paramètre. De plus ce flot est global (*i.e.*

$J = \mathbb{R} \times M$) si la variété est compacte. On dira qu'un champ de vecteurs stratifié engendre un groupe local à un paramètre si, sur chaque strate, ce dernier est une solution maximale à l'équation différentielle déterminée par le champ. Avec cette définition naturelle la proposition suivante ne choquera pas l'intuition :

Proposition 2.6 [Mather]. *Un champ de vecteurs contrôlé sur un e.s.a. engendre un unique groupe local à un paramètre.*

Remarque 2.7. Si de plus l'e.s.a. est supposé compact, on obtient la globalité du flot (*i.e.* $J = \mathbb{R} \times A$), bien que les strates ne soient pas compactes en général.
Cette remarque permet facilement de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.8 [Mather]. *Soient A un e.s.a., M une variété et $f : A \to M$ une submersion contrôlée propre, alors f est une fibration localement triviale.*

Définition 2.9.0 [Goresky]$_1$. *Soit A un e.s.a.. Une famille de lignes de Goresky sur A est une collection de rétractions continues $r_X^\varepsilon : T_X \setminus X \to S_X^\varepsilon$ définies pour toute strate X et pour ε "assez petite", vérifiant les sept relations de commutativité suivantes, pour tout couple de strates $X < Y$ et toutes applications ε et ε' "assez petites" :*

1) $r_X^\varepsilon \circ r_Y^{\varepsilon'} = r_Y^{\varepsilon'} \circ r_X^\varepsilon$;

2) $\rho_X \circ r_Y^\varepsilon = \rho_X$;

3) $\rho_Y \circ r_X^\varepsilon = \rho_Y$;

4) $\pi_X \circ r_Y^\varepsilon = \pi_X$;

5) $r_X^\varepsilon \circ r_X^{\varepsilon'} = r_X^\varepsilon$;

6) $\pi_X \circ r_X^\varepsilon = \pi_X$;

7) $r^\varepsilon_{X|T_X^\varepsilon \cap Y} : T_X^\varepsilon \cap Y \to S_X^\varepsilon \cap Y$ *est une submersion lisse.*

Définition 2.9.1 [Natsume]. *Sous les mêmes hypothèses que la définition précédente, on définit une famille de lignes de Natsume par les mêmes propriétés (1-7) en remplaant la propriété 3) par*

3') $\pi_Y \circ r_X = r_X \circ \pi_Y$.

Remarque 2.9.2. Une famille de lignes de Goresky ou de Natsume respecte la stratification (*i.e.* pour tout couple de strate $X < Y$, l'application r_X^ε admet une restriction $r_{X,Y}^\varepsilon : T_{X,Y} \to S_{X,Y}^\varepsilon$).

L'existence d'une famille de lignes de Goresky sur un e.s.a. a été prouvée dans [Goresky]$_1$. De même, dans [Natsume] il est démontré l'existence de famille de lignes de Natsume en intégrant un champ de vecteurs sur un tube T_X à la fois radial par rapport à X, faiblement contrôlé par rapport aux strates incidentes à X et vérifiant une propriété de transport parallèle au voisinage de la frontière topologique du tube fermé. Cependant dans la démonstration de Natsume on peut facilement remplacer les champs de vecteurs faiblement contrôlés par des champs contrôlés et ainsi récupérer la condition 3) ce qui donne un sens à la définition suivante.

Définition 2.9.3. *Sous les mêmes hypothèses que la définition 2.9.0, on définit une famille de lignes (tout court) par les propriétés 1-7 et 3').*

Définition 2.10. *Soient A un e.s.a., M une variété, $p : A \to M$ une submersion contrôlée propre, surjective sur chaque strate, et $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$. Alors l'e.s.a. $C^\varepsilon(p)$ cylindre d'application de p est défini de la manière suivante : dans la somme topologique $(A \times [0, \varepsilon[) \cup M$, les points $(a, 0)$ et $p(a)$ sont identifiés. Les strates de cet e.s.a. seront $X \times]0, \varepsilon[$ et M, où X parcourt la stratification de A.*

La notion de famille de lignes permet facilement de montrer qu'un tube T_X est isomorphe au cylindre d'application $C^\varepsilon(\pi_{X|S_X^\varepsilon})$, pour ε assez petite, et a donc la même topologie. La famille de lignes $(r_X^\varepsilon)_X$ sera souvent identifiée aux feuilletages de dimension 1 engendrés par la saturation des (r_X^ε).

Définition 2.11. *Deux e.s.a. munis de famille de lignes sont fortement isomorphes s'il existe un isomorphisme envoyant une famille de lignes sur l'autre.*

3. Ensembles stratifiés

Nous abordons à présent la notion d'ensemble stratifié d'une variété.

Définition 3.1. *Une stratification d'un sous-ensemble d'une variété V est une partition localement finie $\mathcal{S}$ de celui-ci en sous-variétés connexes (strates) qui vérifient la condition de frontière (cf. la définition des e.s.a.).*

Si l'ensemble stratifié est fermé, la condition de frontière signifie que l'adhérence de toute strate est une réunion de strates. Plus généralement, si l'espace est localement compact, la condition de frontière exprime le fait qu'au voisinage de tout point de l'ensemble, l'adhérence d'une strate est une réunion de strates.

Pour chaque strate X on peut considérer un voisinage tubulaire (T_X, π_X, ρ_X) de X dans V. Par définition il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "id_{\mathbb{R}}"] & E_\eta \arrow[l, "\|.\|"'] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "id_X"'] \\
\mathbb{R} & T_X \arrow[l, "\rho_X"'] \arrow[r, "\pi_X"] & X
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\eta : X \to]0, +\infty[$ est une application lisse, $(\pi, \|.\|)$ est un fibré riemannien en boules de rayons η et Φ est un difféomorphisme. Pour une application $\varepsilon < \eta$ on définit alors la rétraction lisse

$$r_X^\varepsilon : \begin{cases} T_X \setminus X \longrightarrow \{\rho_X = \varepsilon\} \\ y \longmapsto \phi\big(\frac{\varepsilon \circ \pi_X(y) \phi^{-1}(y)}{\|\phi^{-1}(y)\|}\big) \end{cases}$$

Les rayons du tube sont les saturés d'un point par cette rétraction. Les applications $(\pi_Y, \rho_Y)_{Y \in \mathcal{S}}$ sont appelées données de contrôle standards si, restreintes à l'ensemble stratifié, elles vérifient les mêmes propriétés de commutation que dans le cas abstrait. Par la suite les donnés de contrôle d'un objet stratifié plongé seront toujours standards, c'est-à-dire provenant d'un voisinage tubulaire, sauf mention du contraire (cette convention ne signifie pas l'existence de données de contrôle, cependant la proposition 7.1 de [Mather] prouve, dans le cas des stratifications de Whitney localement compactes, l'existence d'une structure d'e.s.a. standard).

***b*-régularité.** On suppose que V est un espace euclidien dont on considère un sous-ensemble stratifié S. Soit X une strate et x un point de X. Cette stratification vérifie la condition (b) de Whitney au point x, si pour toute strate incidente Y, pour toute suite (x_i) de X et (y_i) de Y tendant vers x, telles que la suite de vecteurs unitaires $\frac{x_i - y_i}{|x_i - y_i|}$ converge vers v dans la sphère unité, et que la suite d'espaces tangents $T_{y_i}Y$ converge vers τ dans la grassmanienne appropriée [Whitney], alors $v \in \tau$. On dira aussi que la stratification est de Whitney si elle vérifie la condition précédente pour tous les points de S.
R. Thom et J. Mather ont montré $[\text{Thom}]_2$, [Mather] que pour tout couple de strates $X < Y$ d'un ensemble stratifié de Whitney et pour tout tube (T_X, π_X, ρ_X), on peut trouver un voisinage ouvert T_X^ε de X tel que $(\pi_X, \rho_X)_{|T_{X,Y}^\varepsilon}$ soit une submersion. Réciproquement D.

Trotman a montré [Trotman]$_1$ que si pour tout tube (T_X, π_X, ρ_X) d'une strate X, et toute strate $Y > X$, l'application $(\pi_X, \rho_X)_{T_{X,Y}}$ est submersive dans un voisinage de $x \in X$, alors la condition (b) est vérifiée en x. Ce dernier résultat montre que la condition (b) est un invariant C^1. La condition (b) peut donc se définir dans une variété en disant qu'elle est vérifiée dans une carte (et donc dans toute les cartes).

a**-régularité.** On rappelle la définition d'un autre invariant C^1, la condition (a) : celle-ci est vérifiée en un point x d'une strate X, si dans une carte toutes les limites d'espaces tangents aux strates incidentes à X contiennent T_xX. Une formulation différente de la condition (a) due à D. Trotman et C.T.C. Wall [Trotman]$_1$, [Wall] est la suivante : pour toute projection π_X sur X et toute strate Y incidente à X, l'application $\pi_{X|Y}$ est submersive dans un voisinage de x.
Contrairement à ce que l'on pourrait croire en voyant leur expression géométrique, les deux conditions de Whitney ne sont pas ouvertes; on pourra s'en convaincre en observant que l'intersection des boules ouvertes standards centrées en x où les couples (π_X, ρ_X) sont submersifs peut se réduire à x (pour des contre-exemples semi-algébriques voir [Trotman]$_2$, [Bekka]$_3$, [Zariski]).

w**-régularité.** Une troisième condition importante dans cette thèse est la condition (w) de Verdier : celle-ci est vérifiée en x s'il existe un voisinage U de x et une constante C tels que $\delta(T_aX, T_bY) \leq C\|a-b\|$, $\forall Y > X$, $\forall a \in X \cap U$, $\forall b \in Y \cap U$. La "distance" δ d'un espace vectoriel A à un autre espace vectoriel B est définie par $sup\{\|a - p_B(a)\|;\, a \in A, \|a\| = 1\}$ où p_B est la projection orthogonale sur B. On remarque que (w) est un invariant C^2 et plus précisément que cette condition est conservée par un difféomorphisme C^1 à dérivée lipschitzienne. Voici maintenant quelques résultats sur les conditions de régularité.

Proposition 3.2 [Mather]. *Soit $A \subset M$ un stratifié de Whitney localement compact et $f : M \to P$ une submersion, alors il existe des données de contrôle standards contrôlant f.*

Dans le cas plongé on améliore la proposition 2.4.

Théorème 3.3 [Shiota]$_1$. *Soient $A \subset M$ un stratifié de Whitney et $f : A \to P$ une submersion contrôlée, alors tout champ de vecteurs sur P peut se relever par f en un champ de vecteurs contrôlé et continu sur A.*

En fait cette dernière condition est équivalente [Bekka]$_2$ à l'existence, pour toute strate, d'une fonction distance ρ_X (pas forcément standard) vérifiant la condition (a_{ρ_X}). Cette condition inventée par K. Bekka [Bekka]$_1$ est habituellement notée (c).

4. Théorèmes de plongement

Définition 4.1. *Soit A un e.s.a. On dira que $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ est un plongement (stratifié) si Φ est un homéomorphisme sur son image et un difféomorphisme restreint à chaque strate.*

On qualifiera le plongement Φ de fermé (resp. (b)-regulier) si l'application Φ est fermée (resp. $\Phi(A)$, qui est canoniquement stratifié, est (b)-régulier).
La nature avant tout topologique d'un e.s.a. interdit la définition du "chemin canonique" (ou de "plus grande pente" par rapport à la fonction distance) pour atteindre une strate, partant d'un point d'une strate incidente. Ce fait provient de la non unicité des solutions de l'équation différentielle $\|d\rho_X(f(t)).f'(t)\|' = 0,\ \|f'(t)\| = 1$. Ainsi, comme dans tous les théorèmes de plongement, nous sommes amenés à faire un choix sur la famille de lignes qui deviendront les rayons d'un tube de l'objet plongé.

Définition 4.2. *Un ensemble stratifié $A \subset \mathbb{R}^n$ est conique ou radial si pour toute strate X il existe un voisinage tubulaire (T_X, π_X, ρ_X) et une application ε telles que $T_X^\varepsilon \cap A = T_X^\varepsilon \cap (r_X^\varepsilon)^{-1}(A)$ (cf. partie 3 pour la définition de r_X^ε). S'agissant d'un plongement $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$, on dira qu'il est de type cylindrique par rapport à une famille de lignes [Teufel], si son image est conique et s'il envoie la famille de lignes sur un système de rayons de l'objet plongé.*

On montre facilement que cette dernière définition est équivalente à celle de [Teufel], bien qu'apparemment plus faible, à savoir que pour toute strate X l'application

$$\begin{cases} \Phi(T_X) \to \mathbb{R}^{2n+1} \\ \Phi(a) \mapsto \big(\rho_X(a)\Phi \circ r_X^\varepsilon(a), \Phi \circ \pi_X(a), \rho_X(a)\big) \end{cases}$$

est la restriction d'un plongement d'un voisinage de $\Phi(T_X)$ dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Nous montrerons dans un premier temps, que tous les stratifiés de Whitney coniques localement compactes, dont les strates sont des variétés C^2, vérifient la condition (w) de Verdier, puis nous nous intéresserons à la possibilité de réaliser semi-algébriquement ou sous-analytiquement des e.s.a.. Enfin nous montrerons l'existence d'un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ d'un e.s.a. compact de dimension n (ce qui répond à une conjecture de Goresky [Goresky]$_3$. Verona a abouti à cette conclusion [Verona]$_1$ mais par des méthodes d'approximation).

Théorème 4.3. *Les conditions (a) et (b) de Whitney et (w) de Verdier sont équivalentes pour des stratifications coniques localement compactes dans le cas où $\mu \geq 2$.*

Remarque 4.4. L'équivalence $(a) \Leftrightarrow (b)$ est encore vraie même si la stratification n'est pas localement compacte. En revanche, il n'est pas sûr que l'implication $(b) \Rightarrow (w)$ soit maintenue.

Preuve.

$(b) \Rightarrow (w)$. Le problème étant local en $x_0 \in X$, une trivialisation C^2 nous permet de considérer le même problème dans le cas simplifié où $X = \mathbb{R}^k \times 0 \subset A \subset \mathbb{R}^n$, π_X est la projection qui oublie les $n-k$ derniers facteurs et ρ_X est la distance euclidienne à $\mathbb{R}^k$. Pour $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ assez petite, $\rho_{X|A \cap T_X^{2\varepsilon} \setminus X}$ est submersive, donc $\{\rho_X = \varepsilon\}$ est transverse à A et d'après [Trotman]$_1$ $\{\rho_X = \varepsilon\} \cap A$ est un stratifié de Whitney que l'on notera A_X; de plus, toujours à cause de la localité de notre étude, ε sera supposée constante. On considère alors le "flot radial" qui est une application C^∞

$$f : \begin{cases} \rho_X^{-1}(\varepsilon) \times [0, \varepsilon] \longrightarrow T_X^{\overline{\varepsilon}} \\ (x,t) \longmapsto tx + (1-t)\pi_X(x) \end{cases}$$

La conicité de A entraine $f(A_X \times [0,\varepsilon]) = T_X^{\overline{\varepsilon}} \cap A$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base normée de $\mathbb{R}^k \times 0$. La condition (w) en x_0 est vérifiée pour le couple de strates $X < Y$ si pour tout t petit, pour tout $x \in \rho_X^{-1}(\varepsilon) \cap Y$ proche de $\pi_{X|A_X}^{-1}(x_0)$ (cette assertion a un sens car la fibre est compacte) et pour tout $x' \in \mathbb{R}^k \times 0$ proche de x_0, il existe $K > 0$ tel que pour $i = 1, \ldots, k$

$$\delta(\mathbb{R}e_i, T_{f(x,t)}Y) \leq K \| f(x,t) - x' \|.$$

Mais $T_X^{\varepsilon} \cap Y = f((Y \cap \rho_X^{-1}(\varepsilon)) \times]0,1[)$ et donc $T_{f(x,t)}Y = df_{f(x,t)}(T_x(Y \cap \rho_X^{-1}(\varepsilon)) \times \mathbb{R})$. D'après le théorème de projection, si $v_i \in df_{(x,t)}(T_x(Y \cap \rho_X^{-1}(\varepsilon)) \times \mathbb{R})$, alors :

$$\delta(\mathbb{R}e_i, df_{(x,t)}(T_x(Y \cap \rho_X^{-1}(\varepsilon)) \times \mathbb{R}) \leq \| v_i - e_i \|.$$

Le vecteur v_i est de la forme :

$df_{(x,t)}(\alpha_{i,t}(x),\beta_{i,t}(x)) = t(\alpha_{i,t}(x)-\pi_X(\alpha_{i,t}(x)))+\beta_{i,t}(x)(x-\pi_X(x))+\pi_X(\alpha_{i,t}(x))$ où $\alpha_{i,t}$ est une famille de champs de vecteurs stratifiés sur A_X paramétrée par t et $\beta_{i,t}$ une famille de fonctions définies sur A_X paramétrée par t.

Sachant que pour $x \in A_X$ et $x' \in \mathbb{R}^k \times 0$, $x-\pi_X(x)$ et $\pi_X(x)-x'$ sont orthogonaux, on a $\|f(x,t)-x'\| \geq t\|x-\pi_X(x)\| = t$. Par orthogonalité de $\pi_X(\alpha_{i,t}(x))-e_i$, de $\alpha_{i,t}(x)-\pi_X(\alpha_{i,t}(x))$ et de $x-\pi_X(x)$, on a $\|e_i-v_i\|^2 = \|\pi_X(\alpha_{i,t}(x))-e_i\|^2+t^2\|\alpha_{i,t}(x)-\pi_X(\alpha_{i,t}(x))\|^2+\mid \beta_{i,t}(x)\mid^2$. La propreté de $(\pi_X,\rho_X)_{|T_X}$ entraine l'existence d'un voisinage compact V_0 de $\pi_X^{-1}(x_0)\cap A_X$ dans A_X. On note :

$$\gamma_i^t = sup\{\|\pi_X(\alpha_{i,t}(x))-e_i\|, x\in V_0\}$$
$$\delta_i^t = sup\{\|\alpha_{i,t}(x)-\pi_X(\alpha_{i,t}(x))\|, x\in V_0\}$$

Si l'on prend $\beta_{i,t}$ identiquement nulle pour tout couple (t,i), avec ce qui précède la condition de Verdier s'écrit $\gamma_i^t \leq K_1 t$ et $\delta_i^t \leq K_2$ pour tout i et tout t proche de 0.

Soit $x_1 \in \pi_X^{-1}(x_0)\cap A_X$ et X_1 la strate de A_X contenant x_1. $\pi_{X|X_1}$ est une submersion, il existe alors sur X_1 un champ de vecteurs continu qui se projette par π_X sur e_i. Le stratifié A_X étant localement compact et b-régulier et π_X étant une submersion, on a, par la proposition 7.1 [Mather], l'existence de données de contrôles de A_X, π_X-compatibles (*i.e.* contrôlant $\pi_{X|A_X}$). D'après le théorème 3.3 il existe un champ continu contrôlé $\alpha_i^{x_1}$ sur l'intersection d'un tube de X_1 dans A_X avec V_0, relevant le champ précédemment construit. La compacité de V_0 entraine l'existence de $x_1,\ldots,x_l$ dans $\pi_{X|A_X}^{-1}(x_0)$ tels que la réunion des domaines de définition de $\alpha_i^{x_1},\ldots,\alpha_i^{x_l}$ soit un voisinage de $\pi_{X|A_X}^{-1}(x_0)$ dans A_X contenu dans V_0. Les contrôles des champs et de $\pi_{X|A_X}$ impliquent que ces champs s'envoient par π_X sur e_i. Les champs $\alpha_i^{x_1},\ldots,\alpha_i^{x_l}$ sont bornés à cause de leur continuité et de la compacité de V_0; pour $\alpha_{i,t}$ on prend alors successivement $\alpha_i^{x_1},\ldots,\alpha_i^{x_k}$ selon l'emplacement de x dans l'intérieur de V_0.

$\underline{(w)\Rightarrow(a)}$ est trivial.

$\underline{(a)\Rightarrow(b)}$. On considère une strate X de A et la "projection" π sur cette strate qui intervient dans la définition de la conicité de A. La condition (b^π) est identique à (b) sauf que l'on impose aux couples de points de la grande et de la petite strate d'être de la forme $\big(y,\pi(y)\big)$. Après une trivialisation C^1 on peut supposer que $X=\mathbb{R}^k\times 0\subset A\subset\mathbb{R}^n$ et que π est la projection qui oublie les $n-k$ derniers facteurs. Manifestement la condition (b^π) est vérifiée ainsi que (a) car c'est un invariant C^1, et d'après [Trotman]$_1$ (b) est aussi vérifiée. ■

Remarque 4.5. La radialité, comme les conditions de Whitney, est un invariant C^1, cependant il ne faudrait pas en déduire, un peu hâtivement, la même chose pour (w) ! En effet la démonstration utilise une trivialisation C^2.
La condition (c) peut être ajoutée dans le théorème car "elle est placée entre" (a) et (b).

Le résultat de ce théorème motive la recherche d'une analogie entre les e.s.a. et les sous-analytiques car on sait plonger radialement les e.s.a., et d'autre part on connait des implications entre conditions de régularité dans le cas sous-analytique, par exemple $(w) \Rightarrow (b)$. Ce travail a été entrepris par M. Shiota dans [Shiota]$_2$ où il montre par des techniques similaires à celles de [Goresky]$_2$, qu'un stratifié de Whitney localement compact est homéomorphe à un sous-analytique. Ici on se propose d'améliorer ce résultat, en construisant un homéomorphisme qui est un plongement stratifié tel que son image soit un ensemble stratifié sous-analytique vérifiant la condition (w) de Verdier et tel que les données de contrôle transmises soient sous-analytiques. Si l'on se contente d'un plongement sous-analytique verifiant (w), il est possible de n'utiliser que le théorème 4.17 et le lemme 4.16 qui se démontre facilement par récurrence comme dans la proposition 7.1 [Mather], sachant qu'il existe une partition de l'unité C^k sous-analytique. D'un point de vue différent, on améliore aussi les résultats de plongements (b)-réguliers de [Natsume], [Verona]$_1$ et en particulier le théorème 2 de [Teufel].

Théorème 4.6. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a. de dimension n muni d'une famille de lignes $(r_X^{\varepsilon_X})_X$. Pour tout entier $k < \mu+1$, il existe un plongement stratifié fermé C^k $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$, de type cylindrique par rapport à la famille de lignes $(r_X^{\varepsilon_X})$, dont l'ensemble stratifié image admet des strates sous-analytiques vérifiant la condition (w). Enfin pour toute strate X, $\Phi \circ \pi_X \circ \Phi^{-1}$ et $\rho_X \circ \Phi^{-1}$ sont les restrictions d'applications d'un voisinage tubulaire sous-analytique C^k.*

Remarques 4.7. On pourra même supposer que $N = 2n + 1$ dans le cas compact, répondant ainsi à une question de Goresky posée dans sa thèse et concernant les projections d'objets stratifiés. On peut facilement montrer qu'un plongement stratifié est fermé si et seulement s'il est propre.

<u>*Preuve*</u>. D'après [Hirsch 2.2.9] on sait que pour toute variété M, il existe une structure C^ω M', compatible avec M; le théorème 4.6 se déduira donc aisément du théorème 4.17, des trois lemmes 4.8, 4.13, 4.15.1 et du corollaire 4.16.

Lemme 4.8. *Soient X, M deux variétés C^μ connexes et f une submersion C^μ surjective*

et propre de X dans M. Il existe un voisinage de f dans la topologie forte tel que pour toute application g dans ce voisinage on ait un difféomorphisme C^μ $\Lambda_g : X \to X$ vérifiant $f = g \circ \Lambda_g$. De plus on peut choisir Λ_g tel que $g \mapsto \Lambda_g$ soit continue en f dans la topologie C^μ forte, avec $\Lambda_f = id_X$.

Preuve. Une preuve de ce lemme est donnée dans [du Plessis, Wall] Cor.5.1.1 PRO 5 - 1. Nous esquisserons ici une démonstration utilisant un lemme d'approximation-extension de plongement propre préservant des fibres, de [Verona]. Les ensembles des submersions surjectives d'une part, et des applications lisses propres d'autre part, sont des ouverts forts, il existe donc un voisinage fort U_0 de f ne contenant que des submersions surjectives propres.

Pour $N > 2\dim X$, il existe un plongement propre C^μ $\Psi : M \to \mathbb{R}^N$. Considérons alors un voisinage tubulaire $(\mathcal{T}, \pi, \rho)$ de $\Psi(M)$ dans $\mathbb{R}^N$. Le lemme 2.7 de [Verona]$_1$ assure l'existence d'un plongement propre C^μ Ψ_f tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi_f} & \mathcal{T} \setminus \Psi(M) \\ \downarrow f & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\Psi} & \Psi(M) \end{array}$$

Soit V un voisinage de Ψ_f dans $C^\mu_S(X, \mathcal{T})$. Les résultats d'approximation et d'extension du lemme 2.7 de [Verona]$_1$ affirment l'existence d'un voisinage $U \subset U_0$ de f dans $C^\mu_S(X, M)$, tel que si g est dans U alors il existe un plongement propre C^μ Ψ_g dans V faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Psi_g} & \mathcal{T} \setminus \Psi(M) \\ \downarrow g & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\Psi} & \Psi(M) \end{array}$$

En particulier, on peut choisir Ψ_g tel que $g \longmapsto \Psi_g$ soit continue dans la topologie forte. On déduit des résultats précédents, l'existence d'un voisinage $U_1 \subset U_0$ de f tel que si $g \in U_1$ alors il existe une isotopie C^μ h_g de $\mathcal{T}$ respectant les fibres de π telle que $h_g\big(\Psi_g(X)\big) = \Psi_f(X)$. Les isotopies h_g peuvent être choisies telles que $g \mapsto h_g$ soit continue en f, avec $h_f = id_{\mathcal{T}}$. La conclusion du lemme est vérifiée si l'on définit $\Lambda_g = \Psi_g^{-1} \circ h_g^{-1} \circ \Psi_f$. Ce lemme peut aussi être démontré par le théorème d'unicité de voisinage tubulaire. ■

Définition 4.11. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a. C^μ et M une variété C^μ. Pour une strate Z, on considère l'application restriction $R_{Z,M}$ définie par*

$$\begin{cases} C^\mu_S(Z, M) \to C^\mu(Z \setminus \bigcup_{Y<Z} T^1_Y, M) \\ f \longmapsto f_{|Z \setminus \bigcup_{Y<Z} T^1_Y} \end{cases}$$

La topologie image directe de l'application $R_{Z,M}$ sera notée $TOP^\mu_{Z,M}$.

On va définir une topologie $TOP^\mu_{A,M}$ sur l'ensemble $C^\mu(A, M)$ des applications continues dont les restrictions aux strates sont des applications C^μ.

Définition 4.12. *Une base de $TOP^\mu_{A,M}$ (ou $C^\mu_S(A, M)$) en f_0 sera constituée des voisinages suivants : l'ensemble des applications f dans $C^\mu(A, M)$ telles que pour toute strate Z la restriction de f à $Z \setminus \bigcup_{Y<Z} T^1_Y$ soit dans un voisinage de la restriction de f_0 dans $TOP^\mu_{Z,M}$. Si B est un autre e.s.a., on définit de la même manière une topologie $TOP^\mu_{A,B}$ sur l'ensemble $C^\mu(A, B)$ des applications continues de A dans B envoyant strate sur strate, dont leur restriction est une application C^μ.*

Lemme 4.13. *Si $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ est un e.s.a. C^μ muni d'une famille de lignes (r_X) et d'une submersion contrôlée propre $f : A \to M$ alors il existe un voisinage U de f dans $C^\mu_S(A, M)$ et pour toute strate X, un voisinage U_X de π_X dans $C^\mu_S(T_X \setminus X, X)$, un voisinage V_X de ρ_X dans $C^\mu_S(T_X \setminus X, \mathbb{R}_+)$ et un voisinage W_X de r_X dans $C^\mu_S(T^2_X \setminus \cup_{Y \leq X} T^{\frac{1}{2}}_Y, S_X)$ tels que si $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}', (r'_X))$ est une autre structure munie d'une submersion contrôlée propre $f' : A \to M$ et vérifiant $\pi'_X \in U_X$, $\rho'_X \in V_X$, $r'_X \in W_X$ $\forall X \in \mathcal{S}$ et $f' \in U$ alors il existe un isomorphisme fort Φ entre $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}', (r'_X))$ et $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}, (r_X))$ tel que $f \circ \Phi = f'$. De plus on peut choisir Φ telle que $\big(f', \mathcal{T}', (r'_X)\big) \longmapsto \Phi$ soit continue en $\big(f, \mathcal{T}, (r_X)\big)$ dans la topologie précédemment définie, avec $\Phi = id_A$ lorsque les deux structures concident.*

Preuve. Quitte à considérer l'intersection de T_X et T'_X, on pourra supposer que $T_X = T'_X$. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur la profondeur de l'e.s.a..

Les strates minimales pour la profondeur pouvant être séparées par leur tubes, on pourra supposer qu'il n'y en a qu'une, que l'on notera X. En choisissant une bonne application C^∞ $h : (X \times \mathbb{R}, X \times 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ telle que pour tout x dans X $h(x, .)$ soit strictement croissante, et en remplaant ρ_X par $h \circ (id_X, \rho_X)$ on peut supposer que $[0,2] \subset \rho_X\big(T_X \cap \pi_X^{-1}(x)\big)$ $\forall x \in X$. Ce changement de fonction distance ne change pas la classe d'isomorphie forte. Par les propriétés des données de contrôle et des familles de lignes (r_Y) et (r'_Y), on définit, par restriction des données et des familles de lignes, une structure d'e.s.a. sur S_X et S'_X et des familles de lignes $(r_{Y|S_X})_{Y>X}$ et $(r'_{Y|S'_X})_{Y>X}$ [Goresky]$_1$. Il est facile de vérifier que la profondeur de ces deux e.s.a. est depth$A-1$. Soit $Y > X$, on considère le champ de vecteurs $\sigma'_{X,Y}$ défini sur $T_{X,Y}$ déterminé par r'_X et vérifiant $\sigma'_{X,Y}.\rho_X = 1$. Pour W_X assez petit on obtient la transversalité du feuilletage défini par r'_X et ρ_X et l'on peut définir alors l'isomorphisme vague $\Psi : S'_X \to S_X$ par $\Psi(z) = r_X'^{-1}\big(r'_X(z)\big) \cap S_X$. On note $\Psi_* S'_X$ la structure d'e.s.a. sur S_X transmise par Ψ; un calcul facile montre que la famille d'applications $(\Psi_* r'_{Y|S'_X})_{Y>X} = (\Psi \circ r'_{Y|S'_X} \circ \Psi^{-1})_{Y>X}$ y définit une famille de lignes et que $\pi'_{X|S_X}$ et donc $\Lambda \circ \pi'_{X|S_X}$ est contrôlé pour $\Psi_* S'_X$, où $\Lambda : X \to X$ est un difféomorphisme, s'il existe, vérifiant $f_{|X} \circ \Lambda = f'_{|X}$. Pour appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux triplets $\big(\Psi_* S'_X, (\Psi_* r'_{Y|S'_X}), \Lambda \circ \pi'_{X|S_X}\big)$ et $\big(S_X, (r_{Y|S_X}), \pi_{X|S_X}\big)$, il suffit de vérifier que pour toute strate Y incidente à X

$\Psi_* \pi'_{Y|S'_X} = \Psi \circ \pi'_{Y|S'_X} \circ \Psi^{-1}$
$\Psi_* \rho'_{Y|S'_X} = \Psi \circ \rho'_{Y|S'_X} \circ \Psi^{-1}$
$\Psi_* r'_{Y|S'_X} = \Psi \circ r'_{Y|S'_X} \circ \Psi^{-1}$
et $\Lambda \circ \pi'_{X|S_X}$
sont dans des voisinages "assez" petits de respectivement

$\pi_{Y|S_X}$

$\rho_{Y|S_X}$

$r_{Y|S_X}$

et $\pi_{X|S_X}$

dans les topologies précédemment définies. Un calcul utilisant les propriétés 3'), 3) et 1) d'une famille de lignes montre que cette assertion est vérifiée pour un bon choix de (U_Z), (V_Z) et (W_Z). L'existence de Λ se justifie par le lemme précédent en prenant U assez petit et donc en "réduisant" U_X et V_X si besoin est; l'utilisation du lemme précédent est valide car $TOP^\mu(A, M)$ concide avec la topologie forte pour la restriction de f à X. On obtient alors un isomorphisme fort Θ_1 entre $\big(\Psi_* S'_X, (\Psi_* r'_{Y|S'_X})_{Y>X}\big)$ et $\big(S_X, (r_{Y|S_X})_{Y>X}\big)$

vérifiant $\pi_X \circ \Theta_1 = \Lambda \circ \pi'_X$ mais par construction
$\Psi : \big(S'_X, (r'_{Y|S'_X})_{Y>X}\big) \to \big(\Psi_* S'_X, (\Psi_* r'_{Y|S'_X})_{Y>X}\big)$
est aussi un isomorphisme fort, il en sera de même pour
$\Theta = \Theta_1 \circ \Psi : \big(S'_X, (r'_{Y|S'_X})_{Y>X}\big) \to \big(S_X, (r_{Y|S_X})_{Y>X}\big)$.
De plus on aura encore $\pi_X \circ \Theta = \Lambda \circ \pi'_X \circ \Psi = \Lambda \circ \pi'_X$ car le feuilletage défini par r'_X respecte les fibres de π'_X. Dans sa Thèse, Goresky construit un isomorphisme fort Ψ_X entre T_X muni de la famille de lignes $(r_{Y|T_X})_{Y\geq X}$ et le cylindre de $\pi_{X|S_X}$ muni de la famille de lignes canoniquement transmise par $(r_{Y|S_X})_{Y>X}$, défini de la manière suivante :

$$\Psi_X(a) = \begin{cases} [r_X(a), \rho_X(a))] & a \notin X \\ [a] & a \in X \end{cases}$$

De la même manière on définit $\Psi'_X : T_X \to C(\pi'_{X|S'_X})$ par

$$\Psi'_X(a) = \begin{cases} [r'_X(a), \rho'_X(a))] & a \notin X \\ [a] & a \in X \end{cases}$$

Si $\tilde{\Theta} : C(\pi'_{X|S'_X}) \to C(\pi_{X|S_X})$ désigne l'isomorphisme fort défini par

$$\begin{cases} [\alpha, \beta] \longmapsto [\Theta(\alpha), \beta] \\ [\alpha] \longmapsto [\Lambda(\alpha)] \end{cases}$$

on notera $\Phi_X : T_X \to T_X$ l'isomorphisme fort $\Psi_X^{-1} \circ \tilde{\Theta} \circ \Psi'_X$ entre les structures $\big(\mathcal{T}', (r'_Y)\big)$ et $\big(\mathcal{T}, (r_Y)\big)$ restreintes à T_X.
Soit $a \in T_X \setminus X$, on a alors

$$\begin{aligned} f \circ \Phi_X(a) &= f \circ \pi_X \circ \Phi_X(a) \text{ car } f \text{ est } \mathcal{T}\text{-contrôlé} \\ &= f \circ \pi_X \circ \Psi_X^{-1}\big([\Theta \circ r'_X(a), \rho'_X(a)]\big) \\ &= f \circ (\pi_X \circ \Theta) \circ r'_X(a) \\ &= f_{|X} \circ \Lambda \circ (\pi'_X \circ r'_X)(a) \\ &= (f_{|X} \circ \Lambda) \circ \pi'_X(a) \\ &= f'_{|X} \circ \pi'_X(a) \\ &= f' \circ \pi'_X(a) \\ &= f'(a) \text{ car } f' \text{ est } \mathcal{T}'\text{-contrôlé} \end{aligned}$$

Si maintenant $a \in X$, on a

$$\begin{aligned} f \circ \Phi_X(a) &= f \circ \pi_X \circ \Phi_X(a) \\ &= f_{|X} \circ \pi_X \circ \Lambda(a) \\ &= f_{|X} \circ \Lambda(a) \\ &= f'_{|X}(a) \\ &= f'(a) \end{aligned}$$

On vient de montrer que dans tous les cas on a $f \circ \Phi_X = f'$.
On observe que depth$A \setminus X$ =depth$A-1$, donc pour une structure $\big(\mathcal{T}'_{A\setminus X}, (r'_Y)_{Y\neq X}\big)$ assez proche de $\big(\mathcal{T}_{A\setminus X}, (r_Y)_{Y\neq X}\big)$ il existe un isomorphisme fort Φ_1 de $\big(A \setminus X, \mathcal{T}'_{A\setminus X}, (r'_Y)_{Y\neq X}\big)$ dans $\big(A \setminus X, \mathcal{T}_{A\setminus X}, (r_Y)_{Y\neq X}\big)$ et vérifiant $f \circ \Phi_1 = f'$. Pour "coller" Φ_X et Φ_1, on va utiliser le théorème de plongement de [Verona]$_1$: il existe des plongements propres de type cylindrique $p_X : T_X \to \mathbb{R}^N$ et $p_1 : A \setminus X \to \mathbb{R}^p$ pour la structure $\big(\mathcal{T}, (r_Y)\big)$ tels que $F_X \circ p_X(u) = f(u)$ et $F_1 \circ p_1(v) = f(v)$ où $F_X : \mathbb{R}^N \to M$ et $F_1 : \mathbb{R}^p \to M$ sont deux submersions propres. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction plateau C^∞ décroissante vérifiant supp$(\alpha) \subset]-\infty, 2[$ et supp$(\alpha - 1) \subset]1, +\infty[$. On est alors en mesure de définir un plongement propre de type cylindrique pour la structure $\big(\mathcal{T}, (r_Y)\big)$

$$H : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{R}^{N+p+1} \\ a \longmapsto \Big(\alpha \circ \rho_X(a) p_X(a), \big(1 - \alpha \circ \rho_X(a)\big) p_1(a), \alpha \circ \rho_X(a)\Big) \end{cases}$$

On a le même résultat pour la structure $\big(\mathcal{T}', (r'_Y)\big)$:

$$H' : \begin{cases} A \to \mathbb{R}^{N+p+1} \\ a \mapsto \Big(\alpha \circ \rho_X \circ \Phi_X(a) p_X \circ \Phi_X(a), \big(1 - \alpha \circ \rho_X(a)\big) p_1 \circ \Phi_1(a), \alpha \circ \rho_X \circ \Phi_X(a)\Big) \end{cases}$$

Par construction et hypothèse, les isomorphismes Φ_X et Φ_1 sont proches de l'identité, on peut donc construire une isotopie h de $\mathbb{R}^{N+p+1}$ proche de l'identité, concidant avec celle-ci sur l'ensemble des points dont la dernière coordonnée n'appartient pas à $[\frac{1}{2}, 2]$, respectant les fibres de la submersion $F_X \times F_1(y, z, t) = \big(F_X(y), F_1(z)\big)$ et envoyant les rayons de $H'(A)$ sur ceux de $H(A)$ (ceci est possible par le théorème d'unicité de voisinage tubulaire).

On obtient bien les conclusions du lemme en posant $\Phi = H^{-1} \circ h \circ H'$, quitte à réduire les tubes autour des strates. ■

Définition 4.15.0. *Sur un e.s.a. à strates analytiques on dira que des données de contrôle ou des familles de lignes sont sous-analytiques si leur restriction à chaque strate est une application sous-analytique.*

Lemme 4.15.1. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a. C^μ à strates analytiques muni d'une famille de lignes (r_X). Pour $k < \mu + 1$ il existe une structure sous-analytique C^k $\mathcal{T}'$ et une famille de lignes (r'_X), telle que $\big(\mathcal{T}', (r'_{X|R'_X})\big)$ soit arbitrairement proche de $\big(\mathcal{T}, (r_{X|R_X})\big)$. Avec $R'_X = T'^2_X \setminus \cup_{Y \leq X} T'^{\frac{1}{2}}_Y$ et $R_X = T^2_X \setminus \cup_{Y \leq X} T^{\frac{1}{2}}_Y$.*

Preuve. Ce résultat préparatoire est démontré dans [Shiota]$_2$ dans le cas des ensembles stratifiés de Whitney localement compacts et pour les données de contrôle uniquement. Dans le cas abstrait la démonstration a le mérite d'être plus simple car le théorème d'extension de voisinage tubulaire n'est plus nécéssaire. L'existence de partition de l'unité sous-analytique C^k associée au théorème d'approximation analytique entrainent que l'on peut approximer dans la topologie définie précédemment les données de contrôle par d'autres données sous-analytiques C^k (on applique les mêmes techniques que [Mather] prop.7.1 ou [GWDL] théo.2.6). Sur la stucture $\mathcal{T}'$ obtenue, on construit, comme dans [Natsume], une famille de lignes C^k (r'_X) "proche" (au sens du lemme) de (r_X). ∎

Corollaire 4.16. *Un e.s.a. C^μ muni d'une famille de lignes est C^k fortement isomorphe à un e.s.a. à strates analytiques et à données de contrôle sous-analytiques muni d'une famille de lignes arbitrairement proche d'une famille de lignes de Goresky sous-analytiques.*

Preuve. Le corollaire est une conséquense directe des deux lemmes 4.13 et 4.15.1. ∎

C'est dans la démonstration de ce lemme que l'on voit qu'il n'est pas possible d'obtenir un plongement stratifié C^∞ sous-analytique avec la méthode suivie, en effet l'équivalent de la proposition 7.1 [Mather] ne peut être obtenue dans la "catégorie" sous-analytique C^∞ car dans celle-ci il n'existe pas de partition de l'unité.

Théorème 4.17. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a. C^k $(k \in \mathbb{N} \setminus 0)$ de dimension n à strates analytiques et muni d'une famille de lignes de Goresky $(r^{\varepsilon_X}_X)_X$, on supposera que les données de contrôle et la famille de lignes sont sous-analytiques. Soit M une variété C^ω et $p : A \to M$ une submersion propre contrôlée, sous-analytique sur chaque strate, alors il existe un plongement stratifié fermé C^k $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$, de type cylindrique par rapport à la famille de lignes $(r^{\varepsilon_X}_X)$, sous-analytique restreint à chaque strate, tel que l'application*

$p \circ \Phi^{-1} : \Phi(A) \to M$ soit une application sous-analytique C^k sur chaque strate, et dont l'ensemble stratifié image admet des strates sous-analytiques vérifiant la condition (w). Enfin pour toute strate X, Φ envoie les lignes de r_X sur les rayons d'un voisinage tubulaire sous-analytique C^k de $\Phi(X)$ dans $\mathbb{R}^N$ qui étend les applications $\Phi \circ \pi_X \circ \Phi^{-1}$ et $\rho_X \circ \Phi^{-1}$.

Preuve. On procède par récurrence sur la profondeur de A : depth$A$. Si depth$A$=0, A est une variété. Le théorème de Whitney classique affirme l'existence d'un plongement C^k propre Ψ de A dans $\mathbb{R}^N$. La densité de $C^\omega(A, \mathbb{R}^N)$ et l'ouverture de $\mathrm{Prop}^k(A, \mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{Emb}^k(A, \mathbb{R}^N)$ [Hirsch] dans $C^k(A, \mathbb{R}^N)$ muni de la topologie forte entraine l'existence d'un plongement analytique propre Φ arbitrairement proche de Ψ.

Les strates minimales pour la profondeur sont fermées et par normalité de A, on peut les séparer par des ouverts, ce qui permet de répéter le raisonnement qui va suivre pour toute strate minimale. On supposera donc qu'il n'y a qu'une strate minimale X.
Quitte à remplacer ρ_X par la composée $h \circ (id_X, \rho_X)$ où $h : (X \times \mathbb{R}, X \times 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ est une application analytique bien choisie telle que pour tout x dans X $h(x, .)$ soit croissante, on pourra supposer que $[0, 2] \subset \rho_X\big(T_X \cap \pi_X^{-1}(x)\big)$ $\forall x \in X$, on note alors S_X pour S_X^1 (et r_X pour r_X^1) qui est un e.s.a. de profondeur inferieure à celle de A. Ce dernier point se montre facilement en utilisant la submersivité de (π_X, ρ_X) et les propriétés de commutation des données de contrôle. La récurrence donne l'existence d'un plongement $\Phi_0 : S_X \to \mathbb{R}^n$ de type cylindrique par rapport à $(r_{Y|S_X})_{Y>X}$, propre C^k, sous-analytique sur chaque strate de S_X, vérifiant la condition (w) et telle que $\pi_X \circ \Phi_0^{-1} : \Phi_0(S_X) \to X$ soit sous-analytique propre et C^k restreint à chaque strate de $\Phi_0(S_X)$. Soit $f : X \to \mathbb{R}^m$ un plongement analytique propre de la strate X, on considère alors l'application $\Phi_1 : T_X \to \mathbb{R}^{n+m+1}$ définie par $\Phi_1(y) = \big(\rho_X(y)\Phi_0 \circ r_X(y), f \circ \pi_X(y), \rho_X(y)\big)$. Par construction le plongement Φ_1 est de type cylindrique par rapport à $(r_{Y|T_X})_{Y \geq X}$, propre, C^k et sous-analytique restreint à chaque strate. L'image de Φ_1 est la double réunion suivante

$$\bigcup_{h \in [0,1]} \bigcup_{z \in \Phi_0(S_X)} \big(hz, f \circ \pi_X \circ \Phi_0^{-1}(z), h\big)$$

L'image d'une strate est donc un sous-analytique. On a $p \circ \Phi_1^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = p \circ \pi_X \circ \Phi_1^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = p \circ f^{-1}(\beta)$ et $p \circ \Phi_1^{-1}$ est bien une application C^k sous-analytique. Enfin la (w)-régularité du plongement est une conséquence du théorème 4.3.. On considère l'e.s.a. A^* déduit de A en supprimant la strate X et en supprimant les données de contrôle qui s'y rapportent. Par récurrence il existe un plongement $\Phi_2 : A^* \to \mathbb{R}^p$ vérifiant les propriétés du théorème. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction plateau C^k sous-analytique décroissante telle que $\mathrm{supp}(\alpha) \subset]-\infty, 2[$ et $\mathrm{supp}(\alpha - 1) \subset]1, +\infty[$. On définit l'application $\Phi : A \to \mathbb{R}^{m+n+1} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ par

$$\Phi(a) = \Big(\alpha \circ \rho_X(a)\, \Phi_1(a), \big(1 - \alpha \circ \rho_X(a)\big)\, \Phi_2(a), \alpha \circ \rho_X(a)\Big)$$

Il existe un recouvrement de A par deux ouverts sur lesquels $p \circ \Phi(\beta, \gamma, \delta)$ vaille respectivement $p \circ \Phi_1^{-1}(\frac{\beta}{\delta})$ et $\Phi_2^{-1}(\frac{\gamma}{1-\delta})$ en admettant par exemple que sur le premier ouvert $\delta > \frac{1}{3}$ et sur le second $\delta < \frac{1}{2}$. Le plongement Φ est visiblement de type cylindrique par rapport à (r_Y) et sous-analytique restreint à chaque strate. La (w)-régularité provient de ce que l'image de Φ est localement équivalente [Spallek] à l'image de Φ_1 ou de Φ_2. ■

Corollaire 4.18. *Soit $(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un e.s.a. compact de dimension n muni d'une famille de lignes $(r_X^{\varepsilon_X})_X$. Pour tout entier $k < \mu + 1$, il existe un plongement stratifié fermé C^k $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$, de type cylindrique par rapport à la famille de lignes $(r_X^{\varepsilon_X})$, dont l'ensemble stratifié image est un semi-algébrique à strates semi-algébrique vérifiant la condition (w).*

Preuve. On remarque que dans le cas compact les strates sont difféomorphes à des variétés semi-algébriques, en effet, d'après le théorème de Nash-Tognoli on a directement le résultat pour les strates de profondeur minimale, pour les autres on retire le tube des strates adjacentes pour obtenir une variété à coins compacte, on lisse les coins pour obtenir une variété à bords, puis on bouche les bords avec le double, ce qui donne une variété compacte, on lui applique le théorème de Nash-Tognoli et l'on retire par de bons polynômes une approximation de l'image du bord et une des deux composantes connexes. Dans le lemme 4.16 on peut remplacer sous-analytique par localement semi-algébrique. On conclut en adaptant naturellement les hypothèse du théorème 4.17. ■

Remarque 4.19. Dans le cas compact, grâce au principe de Tarski-Seidenberg allié au fait que le cône tangent est semi-algébrique de dimension plus petite que celle du projectif correspondant (à cause de la conicité), on obtient par projections génériques hyperplanes un plongement vérifiant les hypothèses du corollaire 4.18 dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ (car une projection générique conserve la conicité).

Références du chapitre I

[Akbulut,King] : S. Akbulut, H. King, Real algebraic structures on topological spaces, Publ. IHES, Vol.53, p.385-397, (1981).

[Bekka]$_1$: K. Bekka, (c)-régularité et trivialité topologique. Singularity theory and its applications, Warwick, 1989, Part I, pages 42-62, LNM 1462, Springer-Verlag, 1991.

[Bekka]$_2$: K. Bekka, Continuous vector fields and Thom's isotopy theorems.
Prépublication, Université de Rennes, 10 pages, 1992.

[Bekka]$_3$: K. Bekka, Regular quasi-homogeneous stratifications.
Actes du colloque Provence-Hawaii. A paraitre.

[du Plessis, Wall] : A.A. du Plessis, C.T.C. Wall, The geometry of topological stability. London Math. Soc. Monograph Series, Oxford Univ. Press, n^{0}9, (1995).

[Goresky]$_1$: R.M. Goresky, Thèse, non publiée, 1976.

[Goresky]$_2$: R.M. Goresky, Triangulation of stratified objects. Proceedings of the AMS, volume 72, pages 193-200, 1978.

[Goresky]$_3$: Whitney stratified chains and cochains. Transactions of the AMS, volume 267, numéro 1, pages 175-196, septembre 1981.

[GWDL] : C.G. Gibson, K. Wirthmller, A. du Plessis, E.J.N. Looijenga, Topological stability of smooth mappings. LNM 552, Springer-Verlag Berlin, 1976.

[Hirsch] : M.W. Hirsch, Differential topology. GTM 33, Springer-Verlag New York, 1988.

[Mather] : J.N. Mather, Notes on topological stability. Non publié. Harvard University (1970).

[Natsume] : H. Natsume, The realisation of abstract stratified sets. Kodai Math. J. 3, p.1-7 (1980).

[Shiota]$_1$: M. Shiota, Piecewise Linearisation of Real Analytic Functions. Publ. of the Research Institute for Mathematical Sciences. Kyoto Univ. **20**, p.727-792, (1984).

[Shiota]$_2$: M. Shiota, Triangulation of subanalytic sets. Singularities, Banach center publications. vol.20. PWN-Polish scientific publishers. Varsovie 1988.

[Spallek] : K. Spallek, Glattung differenzierbarer Rume. Math. Ann.186,233-248 (1970).

[Teufel] : M. Teufel, Abstract prestratified sets are (b)-regular. J. Diff. Geo. 16, p.529-536 (1981).

[Thom]$_1$: R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés. BAMS 75, p.240-284, 1969.

[Thom]$_2$: R. Thom, Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques. Sem. Bourbaki n^0 281. 1964-65.

[Trotman]$_1$: D. Trotman, Thèse. Equisingularité et conditions de Whitney. (1980).

[Trotman]$_2$: D. Trotman, Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 12, p. 453-463, (1979).

[Verdier] : J-L. Verdier, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. Invent. Math. 36. p.295-312 (1976).

[Verona]$_1$: A. Verona, Embeddings of abstract stratifications. Non publié. (∼1981).

[Verona]$_2$: A. Verona, Stratified mappings-structure and triangulability. LNM 1102, Springer-Verlag Berlin, 1984.

[Wall] : C.T.C. Wall, Regular stratifications. Dynamical systems. Warwick 1974, LNM 468 Springer-Verlag. p. 332-344, 1975.

[Whitney] : H. Whitney, Tangents to an analytic variety. Annals of Mathematics 81, p.496-549, 1965.

[Zariski] : O. Zariski, Contributions to the problem of equisingularity, CIME Varenna 1969, Edizioni Cremonese, Rome, (1970).

CHAPITRE II

Problèmes de projections d'ensembles stratifiés de Whitney

1. Deux contre-exemples à une conjecture de R. Thom [Thom]

Dans le premier article, paru aux CRAS, on construit une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{N+1}$, $N \geq 3$, s'accumulant en 0 et telle que $(\mathcal{C}, 0)$ soit de Whitney, mais telle que, pour presque toute projection π hyperplane, $(\pi(\mathcal{C}), 0)$ soit une stratification ne vérifiant pas la condition (b) de Whitney. Cette courbe est construite par morceaux en coordonnées sphériques. Sa partie “tangentielle”, au voisinage de tout point de la sphère unité, parcourt des “sillons” de plus en plus serrés (tel un *labourage* !)

Le deuxième contre-exemple, à paraître aux Proceedings de l'AMS, consiste en une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ s'accumulant en 0 telle que $(\mathcal{C}, 0)$ soit de Whitney, mais telle que, pour toute projection π hyperplane, $(\pi(\mathcal{C}), 0)$ ne soit pas stratifiable. Ceci s'explique par le fait que presque toute projection restreinte à $\mathcal{C}$ est une immersion mais pas une injection. La courbe $\mathcal{C}$ est construite, de même que la précédente, en coordonnées sphériques, de sorte que presque toute projection de $\mathcal{C}$ soit une courbe immergée de $\mathbb{R}^2$ ayant une infinité de points doubles s'accumulant en 0. Pour cela, on considère un ensemble dense de projections de $\mathcal{C}$ admettant une infinité de points doubles et le résultat pour presque toute projection est obtenu par stabilité des points doubles.

Les techniques de paramétrage utilisées dans ces deux articles ressemblent à celles de [Kwiecinski, Trotman].

2. Une condition suffisante pour que la projection soit stratifiable de Whitney

Pour une courbe de $\mathbb{R}^{N+1}$, $N > 2$, singulière en 0, on prend le paramétrage suivant: $f(t) = h(t)\phi(t)$ avec $\|\phi'\| = 1$, h et ϕ étant des applications C^k définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs respectivement dans $]0, 1]$ et S^N. Une forte décroissance "régulière" de h se traduit par une forte décroissance de $|g|$ où $g = \frac{h}{h'}$. On a $\frac{\pi_x(f')}{h} = \frac{\pi_x(\phi)}{g} + \pi_x(\phi')$ où x est un point de S^N et π_x la projection de noyau $\mathbb{R}x$. Sur deux petits cubes centrés en x et $-x$, la distance de $\pi_x\big(\phi(t)\big)$ à 0 doit être prépondérante par rapport à $g(t)$ quand $t \to +\infty$, si l'on veut que (b) soit vérifiée pour $\Big(\pi_x\big(\phi([0, +\infty[)\big), 0\Big)$. En dehors des cubes, on peut inverser limites et projection et donc il n'y a pas de problèmes pour la b-régularité; de plus la dérivée de $\pi_x \circ \phi$ est proche de 1 si π_x est orthogonale.

Ces constatations permettent d'affirmer grâce au lemme suivant que si $\int_0^{+\infty} |g^{N-1}(t)|dt < \infty$ alors presque toute projection hyperplane de la courbe est une stratification de Whitney.

Proposition. *Soient k et φ des applications C^k définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs respectivement dans $]0, 1]$ et B^N, on suppose que k est décroissante, $\|\varphi'\| = 1$ et que*

$\int_0^{+\infty} k^{N-1}(t)dt < \infty$ alors l'ensemble

$$A_\varphi^k = \{x \in I^N, \exists (t_i^x)_i \to +\infty \ \varphi(t_i^x) \to x \ , \|x - \varphi(t_i^x)\| = O\big(k(t_i^x)\big)\}$$

est de mesure nulle.

<u>*Preuve*</u>. On observe facilement que le "volume balayé" par un disque de centre le point $\varphi(t)$ de la courbe et de rayon $k(t)$ entre $t = a$ et $t = +\infty$ est majoré par une constante fois $\int_a^{+\infty} k^{N-1}(t)dt$, donc la mesure de A_φ^k est égale à $\lim(\int_n^{+\infty} k^{N-1}(t)dt)_n = 0$ d'où la conclusion du lemme. ■

Il est clair que le processus peut se poursuivre un nombre fini de fois pour une fonction g bien choisie, ce qui permet d'aboutir, par projection générique (non hyperplane), à une courbe (b)-régulière de $\mathbb{R}^3$. Une généralisation de ce résultat pour un ensemble stratifié de Whitney quelconque est actuellement à l'essai, grâce à la notion de Φ-radialité introduite par K. Bekka et D. Trotman [Bekka,Trotman]$_1$, [Bekka,Trotman]$_2$.

Références du chapitre II

[Bekka,Trotman]$_1$: K. Bekka, D. Trotman, Propriétés métriques de familles Φ-radiales de sous-variétés différentiables, CRAS, Paris, t. 305, série I, p. 389-392, (1987).

[Bekka,Trotman]$_2$: K. Bekka, D. Trotman, Sur les propriétés métriques des espaces stratifiés, prépublication de l'université de Provence, (1995).

[Kwiecinski,Noirel]$_1$: M. Kwiecinski, L. Noirel, Sur une question de René Thom à propos des projections d'une stratification de Whitney. CRAS Paris, 318 série I, p.149-152. (1994).

[Kwiecinski,Noirel]$_2$: M. Kwiecinski, L. Noirel, Whitney-stratified curve in $\mathbb{R}^3$ with multiple-point projections. A paraître aux Proceedings of AMS.

[Kwiecinski,Trotman] : M. Kwiecinski, D. Trotman, Scribbling continua in $\mathbb{R}^n$ and constructing singularities with prescribed Nash fibre and tangent cone. Topology and its applications, Vol. 64, n^0 2, (1995).

[Thom] : R. Thom, Quid des stratifications canoniques. Singularities, Proc. Lille 1991, ed J.P. Brasselet, London Math. Soc. Lecture Note Series, 1995.

CHAPITRE III

(w)-Régularité des variétés : $y^a = t^b x^c + x^d$

Soit F et E des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. La "distance" de F à E est définie par :

$$\delta(F,E) = sup\{\|x - \pi_E(x)\|,\, x \in F, \|x\| = 1\}\,,$$

où π_E est le projecteur orthogonal sur E. Il est clair que $\delta(F,E) = 0 \Leftrightarrow F \subset E$. La variété $X = V \setminus 0t$ désignera la grande strate et $Y = 0t$ la petite strate. On rappelle que (X,Y) vérifie la condition de Verdier [8] (resp de Verdier stricte) en 0 s'il existe un voisinage U de 0 tel que $\delta(T_yY, T_xX) = O(\|x-y\|)$ $\big($resp $\delta(T_yY, T_xX) = o(\|x-y\|)\big)$ pour $x \in X \cap U$ et $y \in Y \cap U$ (l'appellation "stricte" provient des conditions de Whitney du même nom introduites dans [3]). Il est clair que (w) est un invariant C^2. Si $a = 1$, V est le graphe d'une application lisse : $(x,t) \mapsto t^b x^c + x^d$ donc V est une sous-varité lisse de $\mathbb{R}^3$ et (X,Y) vérifie (w) en 0.
Si $v = (0,0,1)$ alors $\delta\big(Y, T_{(x,y,t)}(X)\big) = \frac{|\nabla f(x,y,t)v|}{\|\nabla f(x,y,t)\|}$. Soit π_2 la projection qui oublie le deuxième facteur. Pour $(x,t) \in \pi_2(X)$, soit $Z(x,t) = \frac{|\nabla f(x,y,t)v|}{\|\nabla f(x,y,t)\|.\|(x,y)\|}$, où y est tel que $(x,y,t) \in V$, on vérifie l'indépendance de Z par rapport à la détermination de y. La condition (w) $\big($resp. $(w_s)\big)$ est vérifiée en 0 si Z est bornée au voisinage de 0 dans $\pi_2(X)$ $\big($resp. $Z(x,t)$ tend vers 0 lorsque $(x,t) \in \pi_2(X)$ tend vers 0$\big)$. Pour g et h deux fonctions positives, soit la relation d'équivalence définie par : $g \sim h$ s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que: $\alpha g \leq h \leq \beta g$ au voisinage de 0. On vérifie que $Z \sim Z'$ avec :

$$Z'(x,t) = \frac{\mid t^{b-1} x^c \mid}{sup(\mid c x^{c-1} t^b + d x^{d-1} \mid, \mid t^b x^c + x^d \mid^{\frac{a-1}{a}}).sup(\mid x \mid, \mid t^b x^c + x^d \mid^{\frac{1}{a}})}\,.$$

<u>0) $a = 1$</u>

$Z' \sim \mid t \mid^{b-1} \mid x \mid^{c-1}$. On retrouve que (w) est toujours vérifiée. De plus, (w_s) n'est pas vérifiée $\Longleftrightarrow$ $b = c = 1$.

<u>1) $d \leq c$</u>

<u>1.1) $a \leq d$</u>

$Z' \sim \mid t \mid^{b-1} \mid x \mid^{c-1-\frac{d(a-1)}{a}}$, or $c - 1 - \frac{d(a-1)}{a} \geq 0$, ce qui implique (w), et aussi (w_s) sauf dans le cas $a = c = d$ et $b = 1$. D'après une remarque précédente, dans le cas $a = b = c = d = 1$, Y est le bord de X au sens des variétés mais $(X,Y,0)$ ne vérifie pas la condition (w_s). Ceci constitue un contre-exemple algébrique à l'invariance de (w_s) par un difféomorphisme de Nash.

1.2) $d < a$

$Z' \sim \mid t \mid^{b-1} \mid x \mid^{c-d+1-\frac{d}{a}}$ or $c - d + \frac{a-d}{a} > 0$, ce qui entraîne (w) et (w_s)

2) $c < d$

Kuo,[4], a montré que si la grande strate est semi-analytique alors $(w) \Rightarrow (r) \Rightarrow (b)$, où (r) est le ratio test; la classification de Trotman, [6,7], permet alors de dire qu'en dehors des cas I) et II) suivants (w) n'est pas vérifiée.

cas I : $a > 1$, $b \equiv 0[2]$, $d - c \equiv 0[2]$ et $d < a$.

cas II : $a > 1$, $b \equiv 0[2]$, $d - c \equiv 0[2]$ et $a \leq c$.

2.1) cas I

La parité de b et $d - c$ donne $ct^b + dx^{d-c} \sim t^b + x^{d-c}$ et l'étude de Z' peut se faire pour $x > 0$ et $t \geq 0$. Comme $a > d$ et $b \equiv 0[2]$, pour x proche de 0 on a:

$t^b \geq x^{a-c} - x^{d-c} \;\Rightarrow\; x^c(t^b + x^{d-c}) \geq x^a \;\Rightarrow\; (t^b x^c + x^d)^{\frac{1}{a}} \geq x$

d'où $x = O(t^b x^c + x^d)^{\frac{1}{a}}$.

De plus, $t^b \geq x^{a-c} - x^{d-c} \;\Rightarrow\; x^{c(a-1)} \geq x^{a(c-1)}(t^b + x^{d-c})$, ce qui entraîne :

$x^{c\frac{a-1}{a}}(t^b + x^{d-c})^{\frac{a-1}{a}} \leq x^{c-1}(t^b + x^{d-c})$; or $cx^{c-1}t^b + dx^{d-1} \sim x^{c-1}(t^b + x^{d-c})$, donc $(t^b x^c + x^d)^{\frac{a-1}{a}} = O(cx^{c-1}t^b + dx^{d-1})$;

par conséquent,

$$Z' \sim \frac{t^{b-1}x^{1-\frac{c}{a}}}{(t^b + x^{d-c})^{\frac{a+1}{a}}} .$$

Soit à comparer $\beta = t^b + x^{d-c}$ et $\gamma = t^{\frac{a(b-1)}{a+1}} x^{\frac{a-c}{a+1}}$. Posons $p_0 = \frac{b}{d-c} > 1$. Soit la courbe $x = t^{p_0}$; sur celle-ci, $\beta = 2t^b$ et $\gamma = t^r$ avec $r = \frac{a(d-c)(b-1)+b(a-c)}{(a+1)(d-c)}$ donc

$(w) \Longrightarrow r \geq b \Longrightarrow a(d-c) \leq b(a-d)$ (1)

$(w_s) \Longrightarrow r > b \Longrightarrow a(d-c) < b(a-d)$ (2)

Si $x \leq t^{p_0}$ alors $\gamma \leq t^r$ et la condition (1) (resp (2)) donne $\gamma \leq t^b \leq \beta$ (resp $\gamma = o(t^b) = o(\beta)$).

Si $x \geq t^{p_0}$ alors $\gamma \leq x^{\frac{p_0(a-c)+a(b-1)}{p_0(a+1)}}$ de même (1) (resp (2)) implique $\gamma \leq t^b \leq \beta$ (resp $\gamma = o(t^b) = o(\beta)$). Par conséquent,

(w) est vérifiée $\iff a(d-c) \leq b(a-d)$

(w_s) est vérifiée $\iff a(d-c) < b(a-d)$

2.2) cas II

La parité de b et $d - c$ permet l'etude sur $x > 0$ et $t \geq 0$. Par des calculs similaires, on obtient $(t^b x^c + x^d)^{\frac{1}{a}} = O(x)$ et $cx^{c-1}t^b + dx^{d-1} = O\big((t^b x^c + x^d)^{\frac{a-1}{a}}\big)$ d'où

$$Z' \sim \frac{t^{b-1} x^{\frac{c}{a}-1}}{(t^b + x^{d-c})^{\frac{a-1}{a}}} \, .$$

Soit à comparer $\beta = t^b + x^{d-c}$ et $\gamma = t^{\frac{a(b-1)}{a-1}}$.
Posons $p_0 = \frac{b}{d-c} < 1$. Il suffit de considérer la courbe $x = t^{p_0}$ pour montrer, comme en 2.1), que
(w) est vérifiée $\iff a(d-c) \leq b(d-a)$,
(w_s) est vérifiée $\iff a(d-c) < b(d-a)$.

La proposition suivante résume l'étude précédente.

Proposition 1. *La condition (w) est vérifiée si et seulement si $a = 1$ ou $d \leq c$ ou enfin ($c < d$, b et $d-c$ sont pairs et $a(d-c) \leq b \mid d-a \mid$).*

Proposition 2. *La condition (w_s) est vérifiée si et seulement si ($a = 1$, sauf si $b = c = 1$) ou ($d \leq c$, sauf si $a = c = d$ et $b = 1$), ou enfin ($c < d$, b et $d-c$ sont pairs et $a(d-c) < b \mid d-a \mid$).*

Définition. Soit une stratification: $Y < X$ et $x_0 \in Y$. Le meilleur exposant en x_0 est le réel $\alpha = sup\Lambda$ où Λ est l'ensemble des réels ϵ tels que $\frac{\delta(T_xY, T_yX)}{\|y-x\|^\epsilon}$ soit borné au voisinage de x_0.

Grce au lemme du chemin on montre facilement que si X est semi-algébrique [5] (c'est le cas des variétés $y^a = t^b x^c + x^d$) ou sous-analytique [2] le meilleur exposant est rationnel, et est atteint.
Un calcul similaire aux précédents montre que la sous-famille paramétrée par $\mathbb{N}$:
$y^{(n+1)(n+2)} = t^{2(n+1)} x^{n^2} + x^{n(n+2)}$ est (b)-régulière et de meilleur exposant $\frac{1}{n}$ donc non (w)-régulière pour $n > 1$. On a donc explicité des stratifications (b)-régulières algébriques de meilleur exposant arbitrairement petit non nul. L'escargot de Kuo est un exemple de stratification (b)-régulière (à grande strate non sous-analytique) de meilleur exposant 0.

Références du chapitre III

[1] Bekka, K : Regular quasi-homogeneous stratifications, Actes du colloque Provence-Hawaii, A paraitre.

[2] Hironaka, H : Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Instituto Matematico L. Tonelli dell'universita di Pisa (1973).

[3] Hironaka, H : Normal cones in analytic Whitney stratifications. Public. math. IHES. no36.127 (1969).

[4] Kuo, T.C : The ratio test for analytic Whitney stratifications. Proceedings of Liverpool singularities symposium I. Springer-Verlag Lecture Notes in Math.**192**, p.141 (1971).

[5] Milnor, J : Singular points of complex hypersurfaces.Princeton Univ Press.

[6] Trotman, D : Thèse. Equisingularité et conditions de Whitney. Chap 3, Computations. p.79-86, (1980).

[7] Trotman, D : On the canonical Whitney stratification of algebraic hypersurfaces. Séminaire sur la géométrie algébrique réelle. Tome I. Public. Math. Univ. Paris VII. p.123-152, (1986).

[8] Verdier, J-L : Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. Inventiones math.36. p.295-312 (1976).